LÖSUNGSSKIZZE [P3]

Wie bei der Vorbesprechung deutlich wurde, habe ich bei Aufgabe [P3] nicht ausreichend berücksichtigt, dass wir Studierenden am Anfang des ersten Semesters haben. Hier eine Lösungsskizze, die hoffentlich elementarer vorgeht.

[P3] *Nicht orthogonale Basis*
Wir betrachten den $\mathbb{R}^3$ mit der Basis

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}.$$

(a) Die Metrik $g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$ für diese Basis ist demnach

$$\begin{aligned} g_{11} &= 1\,, & g_{12} &= 1/\sqrt{2}\,, & g_{13} &= 1/\sqrt{3}\,, \\ g_{21} &= 1/\sqrt{2}\,, & g_{22} &= 1\,, & g_{23} &= \sqrt{2/3}\,, \\ g_{31} &= 1/\sqrt{3}\,, & g_{32} &= \sqrt{2/3}\,, & g_{33} &= 1\,. \end{aligned}$$

Hierbei wurden die Skalarprodukte auf die übliche Weise ausgerechnet, $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \sum_{k=1}^{3} (\vec{e}_i)^k (\vec{e}_j)^k$. Es ist nützlich, diese neun Gleichungen kompakter aufzuschreiben,

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1 & \sqrt{2/3} \\ 1/\sqrt{3} & \sqrt{2/3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Man sieht leicht, dass es keine Linearkombination $\lambda^1\vec{e}_1 + \lambda^2\vec{e}_2 + \lambda^3\vec{e}_3 = \vec{0}$ geben kann, bei der nicht alle λ^i verschwinden. Denn es muss $\lambda^3 = 0$ sein, da die z-Komponente sonst nicht verschwindet. Setzt man das voraus, so folgt, dass $\lambda^2 = 0$ sein muss, da sonst die y-Komponente nicht verschwindet. Und setzt man das voraus, dann folgt auch, dass $\lambda^1 = 0$ sein muss, da sonst die x-Komponente nicht verschwindet. Also müssen alle λ^i verschwinden, also sind die $\vec{e}_i$ linear unabhängig.
Alternativ kann man $\det(g_{ij})$ berechnen, z.B.

$$\begin{aligned} \det(g_{ij}) &= 1 \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{2/3} \\ \sqrt{2/3} & 1 \end{vmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} & \sqrt{2/3} \\ 1/\sqrt{3} & 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} & 1 \\ 1/\sqrt{3} & \sqrt{2/3} \end{vmatrix} \\ &= 1(1 - 2/3) - (1/\sqrt{2})(1/\sqrt{2} - \sqrt{2}/3) + (1/\sqrt{3})(1/\sqrt{3} - 1/\sqrt{3}) \\ &= 1/3 - (1/2 - 1/3) + 0 \\ &= 1/6 \\ &\neq 0\,. \end{aligned}$$

(b) Die Basisvektoren haben alle Länge 1. Daher geben die Skalarprodukte direkt den Cosinus des jeweils eingeschlossenen Winkels an.

$$\begin{aligned} \cos(\measuredangle(\vec{e}_1,\vec{e}_2)) &= 1/\sqrt{2} & &\Longrightarrow & \measuredangle(\vec{e}_1,\vec{e}_2) &= \pi/4 = 45^\circ\,, \\ \cos(\measuredangle(\vec{e}_1,\vec{e}_3)) &= 1/\sqrt{3} & &\Longrightarrow & \measuredangle(\vec{e}_1,\vec{e}_3) &= 54{,}7356\ldots^\circ\,, \\ \cos(\measuredangle(\vec{e}_2,\vec{e}_3)) &= \sqrt{2/3} & &\Longrightarrow & \measuredangle(\vec{e}_2,\vec{e}_3) &= 35{,}2644\ldots^\circ\,. \end{aligned}$$

(c) Die zugehörige kanonische Basis des Dualraums ist definiert als die linearen Abbildungen f^i mit $f^i(\vec{e}_j) = \delta^i{}_j$. Diese finden wir durch Lösen der Gleichungen, hier für f^1:

$$\begin{aligned}
f^1(\vec{e}_1) &= (f^1)_1 \cdot 1 + (f^1)_2 \cdot 0 + (f^1)_3 \cdot 0 = 1\,, \\
f^1(\vec{e}_2) &= (f^1)_1 \cdot 1/\sqrt{2} + (f^1)_2 \cdot 1/\sqrt{2} + (f^1)_3 \cdot 0 = 0\,, \\
f^1(\vec{e}_3) &= (f^1)_1 \cdot 1/\sqrt{3} + (f^1)_2 \cdot 1/\sqrt{3} + (f^1)_3 \cdot 1/\sqrt{3} = 0\,.
\end{aligned}$$

Die erste Gleichung liefert $(f^1)_1 = 1$. Damit liefert die zweite Gleichung $(f^1)_2 = -1$. Schließlich findet man dann mit der dritten Gleichung $(f^1)_3 = 0$, also $f^1 = (1, -1, 0)$. Analog findet man $f^2 = (0, \sqrt{2}, -\sqrt{2})$ und $f^3 = (0, 0, \sqrt{3})$.

(d) Wir Betrachten den Vektor $\vec{u} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$. In der Standardbasis ist dieser Vektor gegeben als

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 + 2/\sqrt{2} + 3/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{2} + 3/\sqrt{3} \\ 3/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} \\ \sqrt{2} + \sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}\,.$$

Zu diesem Vektor gibt es ein zugehöriges Element des Dualraums, nämlich die lineare Abbildung $u : \vec{w} \mapsto u(\vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{w}$. Die Komponenten u_j dieser linearen Abbildung bezüglich der Dualbasis f^j finden wir, indem wir

$$\begin{aligned}
u(\vec{e_j}) &= u_i f^i(\vec{e}_j) = u_i \delta^i{}_j = u_j\,, \\
u(\vec{e_j}) &= \vec{u} \cdot \vec{e}_j\,.
\end{aligned}$$

in der Standardbasis ausnutzen. Durch Einsetzen finden wir damit

$$\begin{aligned}
u_1 &= (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot 1 && = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}\,, \\
u_2 &= (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot 1/\sqrt{2} + (\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot 1/\sqrt{2} && = 1/\sqrt{2} + 2 + \sqrt{6}\,, \\
u_3 &= (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot 1/\sqrt{3} + (\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot 1/\sqrt{3} + \sqrt{3} \cdot 1/\sqrt{3} && = 1/\sqrt{3} + 2\sqrt{2/3} + 3\,.
\end{aligned}$$

(e) Mit unseren Bezeichnungen haben wir, dass die x-Achse gerade in Richtung $\vec{e}_1$ liegt. Der Öffnungswinkel ist *nicht* der Winkel zwischen den Achsen, sondern das Doppelte des Winkels zwischen einer Koordinatenrichtung, z.B. $\vec{e}_1$, und der Kegelachse. Diese liegt hier gerade in Richtung $\vec{e}_3$. Also ist $\phi = 2\arccos(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3) = 2\arccos(1/\sqrt{3})$. Das ergibt $\phi = 109,4712°$ und nicht etwa 90°. Eine Skizze hilft vielleicht: