QUANTENMECHANIK II · ◇ · SS 2000 · ◇ · PROF. DIETRICH ZAWISCHA
ABSCHLUSSKLAUSUR · ◇ · 24. JUNI 2000 · ◇ · DAUER: ZWEI STUNDEN

· ◇ · LÖSUNGEN · ◇ ·

■ 1 (1) $H = \frac{1}{2m}(\boldsymbol{p} - \frac{q}{c}\boldsymbol{A})^2 + q\phi + \frac{q\hbar}{2mc}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}$ mit $\boldsymbol{\sigma} = \frac{2}{\hbar}\boldsymbol{S}$. 2:10

(2)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= \tfrac{1}{2}\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{x} = \tfrac{B}{2}(-y,x,0)^t\,,\\
\boldsymbol{A}' &= -B(y,0,0)^t\,,\\
\operatorname{rot}\boldsymbol{A} &= \tfrac{B}{2}(0,0,1+1)^t = (0,0,B)^t = \boldsymbol{B}\,,\\
\operatorname{rot}\boldsymbol{A}' &= (0,0,B)^t = \boldsymbol{B}\,,\\
\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{A}' + \boldsymbol{\nabla}(\tfrac{|\boldsymbol{B}|}{2}xy)
\end{aligned}$$

Umeichung. 2:10

(3) $\psi = \psi'\ \exp(\mathrm{i}\frac{q}{\hbar c}\frac{|\boldsymbol{B}|}{2}xy) \equiv \psi'\ \exp(\mathrm{i}\frac{q\lambda}{\hbar c})$, denn

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2m}(\tfrac{\hbar}{\mathrm{i}}\boldsymbol{\nabla}\underbrace{-\tfrac{q}{c}\boldsymbol{A}' - \tfrac{\hbar}{\mathrm{i}}\tfrac{\mathrm{i}}{\hbar}\tfrac{q}{c}\boldsymbol{\nabla}\lambda}_{-\frac{q}{c}\boldsymbol{A}})^2\underbrace{\psi'\exp(\mathrm{i}\tfrac{q\lambda}{\hbar c})}_{\psi} &= \tfrac{1}{2m}(\tfrac{\hbar}{\mathrm{i}}\boldsymbol{\nabla} - \tfrac{q}{c}\boldsymbol{A})\exp(\mathrm{i}\tfrac{q\lambda}{\hbar c})(\tfrac{\hbar}{\mathrm{i}}\boldsymbol{\nabla} - \tfrac{q}{c}\boldsymbol{A}')\psi'\\
&= \tfrac{1}{2m}\exp(\mathrm{i}\tfrac{q\lambda}{\hbar c})(\tfrac{\hbar}{\mathrm{i}}\boldsymbol{\nabla} - \tfrac{q}{c}\boldsymbol{A}')^2\psi'\\
&= \exp(\mathrm{i}\tfrac{q\lambda}{\hbar c})(-\mathrm{i}\hbar\partial_t\psi') \;=\; -\mathrm{i}\hbar\partial_t\psi\,,
\end{aligned}$$

da $\lambda \neq \lambda(t)$. 6:10

■ 2 (1) $H_{LS} = \xi\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$. Also $j = \ell + \frac12$ oder $j = \ell - \frac12$. 1:10

(2) $H_{LS} = \frac12\xi(\boldsymbol{J}^2 - \boldsymbol{L}^2 - S^2)$. Damit sind die Eigenwerte $E_{J,L,\frac12} = \frac12\xi\hbar^2(j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac34)$. Für $j = \ell + \frac12$ ergibt sich $E = \frac12\xi\hbar^2\ell$, und für $j = \ell - \frac12$ ergibt sich $E = -\frac12\xi\hbar^2(\ell+1)$. 3:10

(3) Die Eigenzustände $|j, m_j; \ell, S\rangle$ für $j = \frac32, \ell = 1$ und $S = \frac12$ sind gefragt. Höchstgewichtszustand ist $|\frac32,\frac32;1\frac12\rangle = |1,+1\rangle|\uparrow\rangle$. Anwenden von J_- ergibt $\sqrt{\frac{15}{4} - \frac34}|\frac32,\frac12;1,\frac12\rangle = \sqrt2|1,0\rangle|\uparrow\rangle + |1,+1\rangle|\downarrow\rangle$, also der Reihe nach:

$$\begin{aligned}
|\tfrac32,\tfrac12;1,\tfrac12\rangle &= \tfrac{\sqrt2}{\sqrt3}|1,0\rangle|\uparrow\rangle + \tfrac{1}{\sqrt3}|1,+1\rangle|\downarrow\rangle\,,\\
|\tfrac32,-\tfrac12;1,\tfrac12\rangle &= \tfrac{\sqrt2}{\sqrt3}|1,0\rangle|\downarrow\rangle + \tfrac{1}{\sqrt3}|1,-1\rangle|\uparrow\rangle\,,\\
|\tfrac32,-\tfrac32;1,\tfrac12\rangle &= |1,-1\rangle|\downarrow\rangle\,.
\end{aligned}$$

Dazu kommt der Höchstgewichtszustand $|\frac12,\frac12;1,\frac12\rangle = -\frac{1}{\sqrt3}|1,0\rangle|\uparrow\rangle + \frac{\sqrt2}{\sqrt3}|1,+1\rangle|\downarrow\rangle$. Man erhält ihn als den zu $|\frac32,\frac12;1,\frac12\rangle$ orthogonalen Zustand. Anwenden von J_- ergibt $|\frac12,-\frac12;1,\frac12\rangle = -\frac{\sqrt2}{\sqrt3}|1,-1\rangle|\uparrow\rangle - \frac{1}{\sqrt3}|1,0\rangle|\downarrow\rangle + \frac{\sqrt2}{\sqrt3}|1,0\rangle|\downarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt3}|1,0\rangle|\downarrow\rangle - -\frac{\sqrt2}{\sqrt3}|1,-1\rangle|\uparrow\rangle$. 6:10

■ 3 (1) Mit $[a,a^\dagger]=1$ und $[a,a]=0$ etc. gilt $[a,a^\dagger a]=a$ und $[a^\dagger,a^\dagger a]=-a^\dagger$. Damit hat man

$$
\begin{aligned}
[L_z,L_+] &= [L_z,\hbar\sqrt{2\ell-a^\dagger a}a] \\
&= \underbrace{[L_z,\hbar\sqrt{2\ell-a^\dagger a}]}_{=0}a+\hbar\sqrt{2\ell-a^\dagger a}[L_z,a] \\
&= \hbar^2\sqrt{2\ell-a^\dagger a}[\ell-a^\dagger a,a] \\
&= \hbar^2\sqrt{2\ell-a^\dagger a}a \\
&= \hbar L_+\,, \\
[L_z,L_-] &= -\hbar L_-\,, \\
[L_+,L_-] &= \hbar^2\sqrt{2\ell-a^\dagger a}\quad\underbrace{aa^\dagger}_{=a^\dagger a+1}\quad\sqrt{2\ell-a^\dagger a}-\hbar^2a^\dagger\quad\underbrace{(2\ell-a^\dagger a)a}_{=a(2\ell-a^\dagger a)+a} \\
&= \hbar^2(a^\dagger a+1)(2\ell-a^\dagger a)-\hbar^2a^\dagger a(2\ell-a^\dagger a+1) \\
&= 2\hbar^2(\ell-a^\dagger a) \\
&= 2\hbar L_z\,,
\end{aligned}
$$

also die Drehimpulsalgebra in Auf-/Ab-Steiger-Darstellung. $\boxed{7{:}10}$

(2) $\boldsymbol{L}^2=(L_z)^2+\frac{1}{2}L_+L_-+\frac{1}{2}L_-L_+=(L_z)^2-\hbar L_z+L_+L_-=\hbar^2\ell(\ell+1)$, wobei man in L_+L_- in der Mitte $aa^\dagger=1+a^\dagger a$ umforme und beachte, dass dann $a^\dagger a$ mit allen anderen Termen kommutiert. $\boxed{3{:}10}$

■ 4 (1) Zur Erinnerung: $a^\dagger|n\rangle=\sqrt{n+1}|n{+}1\rangle$ und $a|n\rangle=\sqrt{n}|n{-}1\rangle$. Wir benötigen nur die erste Ordnung Störungstheorie, aber für einen beliebigen Zustand: $\epsilon_n^{(1)}=\langle n|\alpha\frac{m^2\omega^2}{\hbar}x^4|n\rangle$. Wir haben $x^2=\frac{\hbar}{2m\omega}(a^2+aa^\dagger+a^\dagger a+(a^\dagger)^2)$ und $x^4=\frac{\hbar^2}{4m^2\omega^2}(a^4+a^3a^\dagger+a^2a^\dagger a+\ldots)$, wobei $\ldots$ für alle verschiedenen Monome in den a's und $a^\dagger$'s vom Grade vier steht. Damit ist

$$
\begin{aligned}
\langle n|x^4|n\rangle &= \tfrac{\hbar^2}{4m^2\omega^2}\big(\langle n|a^2(a^\dagger)^2|n\rangle+\langle n|aa^\dagger aa^\dagger|n\rangle+\langle n|a(a^\dagger)^2a|n\rangle \\
&\qquad+\langle n|a^\dagger a^2a^\dagger|n\rangle+\langle n|a^\dagger aa^\dagger a|n\rangle+\langle n|(a^\dagger)^2a^2|n\rangle \\
&= \tfrac{\hbar^2}{4m^2\omega^2}\big((n{+}1)(n{+}2)+(n{+}1)^2+n(n{+}1)+n(n{+}1)+n^2+n(n{-}1)\big) \\
&= \tfrac{\hbar^2}{4m^2\omega^2}(6n^2+6n+3)\,.
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich die Energiekorrektur zu $\epsilon_n^{(1)}=\frac{3}{4}\hbar\alpha(2n^2+2n+1)$. $\boxed{10{:}10}$

■ 5 (1 und 2) $H=-t\sum_{i,\alpha}(c_{i+1,\alpha}^\dagger c_{i,\alpha}+c_{i,\alpha}^\dagger c_{i+1,\alpha})+U\sum_i c_{i,\uparrow}^\dagger c_{i,\uparrow}c_{i,\downarrow}^\dagger c_{i,\downarrow}$. Mit den Standard-Antikommutatoren $\{c_{i,\alpha},c_{j,\beta}^\dagger\}=\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta}$ ergibt sich damit

$$
\begin{aligned}
[H,c_{j,\alpha}^\dagger] &= -t[c_{j+1,\alpha}^\dagger c_{j,\alpha}+c_{j-1,\alpha}^\dagger c_{j,\alpha},c_{j,\alpha}^\dagger]+Uc_{j,-\alpha}^\dagger c_{j,-\alpha}[c_{j,\alpha}^\dagger c_{j,\alpha},c_{j,\alpha}^\dagger] \\
&= -t(c_{j+1,\alpha}^\dagger+c_{j-1,\alpha}^\dagger)+Uc_{j,-\alpha}^\dagger c_{j,-\alpha}c_{j,\alpha}^\dagger\,, \\
[H,c_{j,\alpha}] &= -[H,c_{j,\alpha}^\dagger]^\dagger \\
&= \quad t(c_{j+1,\alpha}+c_{j-1,\alpha})-Uc_{j,-\alpha}^\dagger c_{j,-\alpha}c_{j,\alpha}^\dagger\,.
\end{aligned}
$$

Hierbei ist wie üblich $\uparrow=+\frac{1}{2}$, $\downarrow=-\frac{1}{2}$. Im allerletzten Term wurde noch umgeordnet. $\boxed{7{:}10}$

(3) Im Heisenberg-Bild lauten die Bewegungsgleichngen $\partial_tA=\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[H,A]$. Also

$$
\begin{aligned}
\partial_tc_{j,\alpha}^\dagger &= \quad\tfrac{\mathrm{i}}{\hbar}\left(-t(c_{j+1,\alpha}^\dagger+c_{j-1,\alpha}^\dagger)+Uc_{j,-\alpha}^\dagger c_{j,-\alpha}c_{j,\alpha}^\dagger\right)\,, \\
\partial_tc_{j,\alpha} &= -\tfrac{\mathrm{i}}{\hbar}\left(-t(c_{j+1,\alpha}+c_{j-1,\alpha})+Uc_{j,-\alpha}^\dagger c_{j,-\alpha}c_{j,\alpha}^\dagger\right)\,,
\end{aligned}
$$

durch Einsetzen der Resultate von (i). $\boxed{3{:}10}$

■ 6 (1) $\rho(x)=\psi^\dagger(x)\psi(x)$, $\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\hat{\psi}_k$. Damit

$$
\begin{aligned}
\hat{\rho}(q) &= \textstyle\sum_x\rho(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}qx} \\
&= \tfrac{1}{N}\textstyle\sum_{k,k'}\sum_x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(q+k-k')x}\hat{\psi}_k^\dagger\hat{\psi}_{k'} \\
&= \textstyle\sum_k\hat{\psi}_k^\dagger\hat{\psi}_{k+q}
\end{aligned}
$$

als die Fouriertransformierte. $\boxed{4{:}10}$

(2) $\boldsymbol{j}(x) = \frac{\hbar}{2m\mathrm{i}}(\psi^\dagger(x)\boldsymbol{\nabla}\psi(x) - (\boldsymbol{\nabla}\psi^\dagger(x))\psi(x))$. Entsprechend

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{j}}(q) &= \textstyle\sum_x \boldsymbol{j}(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}qx} \\
&= \tfrac{1}{N}\textstyle\sum_{k,k'}\sum_x \frac{\hbar}{2m\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(q+k-k')x}(\hat{\psi}_k^\dagger(\mathrm{i}k')\hat{\psi}_{k'} + \mathrm{i}k\hat{\psi}_k^\dagger\hat{\psi}_{k'}) \\
&= \tfrac{\hbar}{2m}\textstyle\sum_{k,k'}\delta_{q+k,k'}(k'+k)\hat{\psi}_k^\dagger\hat{\psi}_{k'} \\
&= \tfrac{\hbar}{2m}\textstyle\sum_k(2k+q)\hat{\psi}_k^\dagger\hat{\psi}_{k+q}
\end{aligned}$$

als die Fouriertransformierte. $\boxed{4{:}10}$

(3) $T = \sum_x \psi^\dagger(x)\frac{-\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\psi(x) = \sum_k \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\hat{\psi}_k^\dagger\hat{\psi}_k$. $\boxed{2{:}10}$

■ 7 (1) $|\Psi(t)\rangle = \mathcal{T}\exp(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{t_a}^t \mathrm{d}t\,V(t))|\Psi(t_a)\rangle$ mit $|\Psi_t\rangle = \exp(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H_0 t)|\Psi(t)\rangle$ und $V(t) = \exp(+\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H_0 t)V_t\exp(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H_0 t)$ im Wechselwirkungs-Bild. In erster Ordnung ist

$$\begin{aligned}
\langle n|\Psi_t\rangle &= \exp(-\tfrac{\mathrm{i}}{\hbar}\epsilon_n t)\langle n|\Psi(t)\rangle \\
&= \exp(-\tfrac{\mathrm{i}}{\hbar}\epsilon_n t)\langle n|1 - \tfrac{\mathrm{i}}{\hbar}\textstyle\int_{-\infty}^t \mathrm{d}t\,V(t)|0\rangle\,.
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist $n \neq 0$, und damit

$$\begin{aligned}
P_{|0\rangle\to|n\rangle} &= |\langle n|\Psi_t\rangle|^2 \\
&= \tfrac{1}{\hbar^2}\left|\textstyle\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}t\,\langle n|V(t)|0\rangle\right|^2 \\
&= \tfrac{q^2F^2}{\hbar^2}|\langle n|x|0\rangle|^2\left|\textstyle\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}t\,\mathrm{e}^{-\alpha t^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega n t}\right|^2\,.
\end{aligned}$$

Das Matrixelement $\langle n|x|0\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle n|a + a^\dagger|0\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\delta_{n,1}$ und das Integral

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}t\,\exp(-\alpha t^2 + \mathrm{i}\omega n t + \frac{\omega^2 n^2}{4\alpha})\cdot\exp(-\frac{\omega^2 n^2}{4\alpha}) \\
&\qquad= \exp(-\frac{\omega^2 n^2}{4\alpha})\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}t\,\exp(-\alpha(t - \frac{\mathrm{i}\omega n}{2\alpha})^2) \\
&\qquad= \exp(-\frac{\omega^2 n^2}{4\alpha})\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_{-\infty-\mathrm{i}\gamma}^{\infty+\mathrm{i}\gamma}\mathrm{d}y\,\mathrm{e}^{-y^2}
\end{aligned}$$

mit $\gamma = \frac{\omega n}{2\sqrt{\alpha}}$. Damit ergibt sich für das Integral der Wert $\exp(-\frac{\omega^2 n^2}{4\alpha})\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}$. Die Übergangsamplitude ist $P_{|0\rangle\to|n\rangle} = \frac{q^2F^2\pi}{\hbar\alpha 2m\omega}\exp(-\frac{\omega^2 n^2}{2\alpha})\delta_{n,1}$. $\boxed{10{:}10}$

■ 8 (1) $\mathrm{i}\hbar\partial_t\Psi(\boldsymbol{r},t) = H_{\mathrm{Dirac}}\Psi(\boldsymbol{r},t)$ mit der Matrix

$$H_{\mathrm{Dirac}} = \begin{pmatrix} mc^2 & 0 & cp_z & c(p_x - \mathrm{i}p_y) \\ 0 & mc^2 & c(p_x + \mathrm{i}p_y) & -cp_z \\ cp_z & c(p_x - \mathrm{i}p_y) & -mc^2 & 0 \\ c(p_x + \mathrm{i}p_y) & -cp_z & 0 & -mc^2 \end{pmatrix}.$$

Ansatz: $\Psi(\boldsymbol{r},t) = \psi(\boldsymbol{r})\exp(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}Et)$. Das führt zu $E\psi(\boldsymbol{r}) = H_{\mathrm{Dirac}}\psi(\boldsymbol{r})$, also ist

$$\begin{pmatrix} mc^2 - E & 0 & cp_z & c(p_x - \mathrm{i}p_y) \\ 0 & mc^2 - E & c(p_x + \mathrm{i}p_y) & -cp_z \\ cp_z & c(p_x - \mathrm{i}p_y) & -mc^2 - E & 0 \\ c(p_x + \mathrm{i}p_y) & -cp_z & 0 & -mc^2 - E \end{pmatrix}\psi(\boldsymbol{r}) = 0$$

das gesuchte Gleichungssystem. Bei festem Impuls in z-Richtung ergibt sich

$$\begin{pmatrix} mc^2 - E & 0 & cp_z & 0 \\ 0 & mc^2 - E & 0 & -cp_z \\ cp_z & 0 & -mc^2 - E & 0 \\ 0 & -cp_z & 0 & -mc^2 - E \end{pmatrix}\psi(\boldsymbol{r}) = 0$$

als vereinfachtes System. $\boxed{4{:}10}$

(2) Lösungsbedingung ist

$$
\begin{aligned}
0 &= \det(H_{\text{Dirac}} - E\mathbb{1}) \\
&= (mc^2 - E)\left((mc^2 - E)(mc^2 + E)^2 + c(mc^2 + E)p_z^2 \right.\\
&\qquad \left. + c^2(p_x - \mathrm{i}p_y)(p_x + \mathrm{i}p_y)(mc^2 - e)\right) \\
&+ cp_z\left(c^3 p_z^3 + c^3(p_x - \mathrm{i}p_y)(p_x + \mathrm{i}p_y)p_z + cp_z(mc^2 - E)(mc^2 + E)\right) \\
&- c(p_x + \mathrm{i}p_y)\left(-c^2p_z^2(p_x - \mathrm{i}p_y) - c(p_x - \mathrm{i}p_y)(mc^2 - E)(mc^2 + E)\right. \\
&\qquad \left. - c^3(p_x - \mathrm{i}p_y)^2(p_x + \mathrm{i}p_y)\right) \\
&= (m^2c^4 - e^2)^2 + 2(m^2c^4 - E^2)cp_z^2 + c^4p_z^4 + 2c^4p_z^2(p_x^2 + p_y^2) \\
&\qquad + 2(mc^2 - E)c^2(p_x^2 + p_y^2) + c^4(p_x^2 + p_y^2)^2 \\
&= (m^2c^4 - E^2 + cp_x^2 + c^2p_y^2 + c^2p_z^2)^2 \\
&= (m^2c^4 - E^2 + c^2\boldsymbol{p}^2)^2\,.
\end{aligned}
$$

Also muss die Beziehung $E = \pm\sqrt{m^2c^4 + c^2\boldsymbol{p}^2}$ gelten. Für festen Impuls in z-Richtung vereinfacht sich auch diese Rechnung zu

$$
\begin{aligned}
\det(H_{\text{Dirac}} - E\mathbb{1}) &= (mc^2 - E)\left((mc^2 - E)(mc^2 + E)^2 + c(mc^2 + E)p_z^2\right) \\
&+ cp_z\left(c^3p_z^3 + cp_z(m^2c^4 - E^2)\right) \\
&= (m^2c^4 - E^2)^2 + 2c^2p_z^2(m^2c^4 - E^2) - c^4p_z^4 \\
&= (m^2c^4 - E^2 + c^2p_z^2)^2 \quad = \quad 0\,,
\end{aligned}
$$

was zu der Beziehung $E = \pm\sqrt{m^2c^4 + c^2p_z^2}$ führt. 3:10

(3) Ansatz: $\psi(\boldsymbol{r}) = \exp(\mathrm{i}p_z z/\hbar)\begin{pmatrix}\alpha\\0\\\beta\\0\end{pmatrix}$, da die (1,3)-Komponenten und die (2,4)-Komponenten des Spinors entkoppeln. Damit erhält man die Bedingungen $(mc^2 - E)\alpha + c\beta p_z = 0$ und $cp_z\alpha - (mc^2 + E)\beta = 0$. Also ist $\psi_{1,3}(\boldsymbol{r}) = \exp(\mathrm{i}p_z z/\hbar)\begin{pmatrix}1\\0\\\frac{+p_z}{mc^2 \pm E}\\0\end{pmatrix}$.

Analog erhält man $\psi_{2,4}(\boldsymbol{r}) = \exp(\mathrm{i}p_z z/\hbar)\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\frac{-p_z}{mc^2 \pm E}\end{pmatrix}$. 3:10