· ◇ · LÖSUNGEN · ◇ ·

■ 1 (1) $S_k = \sum_{i=1}^N S_k^{(i)} = s_k \otimes 1\!\!1 \otimes \ldots \otimes 1\!\!1 + \ldots + 1\!\!1 \otimes \ldots \otimes 1\!\!1 \otimes s_k$. Eine Vertauschung von Spins ändert nur die Reihenfolge der Summanden, womit S_k unverändert bleibt. $\boxed{2{:}20}$

(2) $|\chi\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes \ldots \otimes |\uparrow\rangle$, also $S = N\frac{\hbar}{2}$ und $m_S = N\frac{\hbar}{2}$. $\boxed{2{:}20}$

(3) $S_+ = \sum_{i=1}^N S_+^{(i)} = s_+ \otimes 1\!\!1 \otimes \ldots \otimes 1\!\!1 + \ldots + 1\!\!1 \otimes \ldots \otimes 1\!\!1 \otimes s_+$. Wegen $s_+|\uparrow\rangle = 0$ gilt schon $S_+^{(i)}|\chi\rangle = 0 \implies S_+|\chi\rangle = 0$. S_- ist invariant unter Vertauschung wegen (1). $|\chi\rangle$ ist offensichtlich auch invariant, daher ist $(S_-)^n|\chi\rangle$ ebenfalls invariant. $\boxed{4{:}20}$

(4) Die Zustände $(S_-)^n|\chi\rangle$ für $0 \le n \le N$ sind alle symmetrisch und linear unabhängig, da $S_z(S_-)^n|\chi\rangle = \hbar(\frac{N}{2} - n)(S_-)^n|\chi\rangle$, d.h. die S_z Eigenwerte sind verschieden. Sie haben alle $S = \frac{N}{2}\hbar$, da sie aus dem Höchstgewichtszustand $|\chi\rangle$ entstehen. Mehr Zustände mit $S = \frac{N}{2}\hbar$ kann es andererseits nicht geben, da die Dimension der Darstellung zu $S = \frac{N}{2}\hbar$ eben $N+1$ ist, und genau so viele $(S_-)^n|\chi\rangle$ existieren. $\boxed{5{:}20}$

(5) Zu $N = 3$ gibt es $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ Zustände, 4 schon mit $S = \frac{3}{2}$, es bleiben $2 \cdot 2$ mit $S = \frac{1}{2}$. $\boxed{3{:}20}$

(6) Die Angabe ist nicht in eindeutiger Weise möglich, z.B. $\frac{1}{\sqrt{6}}(|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle - 2|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle)$ und $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\uparrow\downarrow\rangle)$ sind Zustände mit $m_S = \hbar/2$. Man muß die Zustände mit $S = m_S = \hbar/2$ so konstruieren, dass sie auf $\frac{1}{\sqrt{3}}(|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle + |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle)$ mit $(S = 3\hbar/3, m_S = \hbar/2)$ senkrecht stehen, oder man rechnet $S_+ \ldots = 0$ nach. $\boxed{4{:}20}$

■ 2 (1) $H = H_0 + \lambda V_1 + \lambda^2 V_2$ mit H_0 dem Hamilton-Operator des harmonischen Oszillators, $H_0 = -\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})$. $V_1 = c_1 x^3$, $V_2 = c_2 x^4$. Mit $x = \frac{1}{\sqrt{2}}x_0(a + a^\dagger)$, $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ ergibt sich

$$
\begin{aligned}
x^3 &= \tfrac{x_0^3}{\sqrt{8}}(a^3 + aaa^\dagger + aa^\dagger a + a^\dagger aa + a^\dagger a^\dagger a + a^\dagger aa^\dagger + aa^\dagger a^\dagger + (a^\dagger)^3) \\
&= \tfrac{x_0^3}{\sqrt{8}}(a^3 + 3a^\dagger a^2 + 3a + 3(a^\dagger)^2 a + \underline{3a^\dagger + (a^\dagger)^3})\,, \\
x^4 &= \tfrac{x_0^4}{4}(a^4 + 3a^\dagger a^3 + 3(a^\dagger)^2 a^2 + (a^\dagger)^3 a + 3a^2 + 3a^\dagger a + a^3 a^\dagger + 3a^\dagger a^2 a^\dagger \\
&\quad +3(a^\dagger)^2 aa^\dagger + (a^\dagger)^4 + 3aa^\dagger + 3(a^\dagger)^2 \\
&= \tfrac{x_0^4}{4}(a^4 + 4a^\dagger a^3 + 6(a^\dagger)^2 a^2 + 4(a^\dagger)^3 a + 3a^2 + 3a^\dagger a + 3a^2 + 6a^\dagger a + 3(a^\dagger)^2 \\
&\quad +(a^\dagger)^4 + 3a^\dagger a + 3 + 3a^\dagger) \\
&= \tfrac{x_0^4}{4}(a^4 + 4a^\dagger a^3 + 6(a^\dagger)^2 a^2 + 4(a^\dagger)^3 a + (a^\dagger)^4 + 6a^2 + 6(a^\dagger)^2 + 12a^\dagger a + \underline{3})\,,
\end{aligned}
$$

wenn man $a^n a^\dagger = a^\dagger a^n + na^{n-1}$ ausnutzt. $\boxed{5{:}10}$

(2) Damit liest man ab: $\underline{\delta E_1} = \lambda c_1\langle 0|V_1|0\rangle \sim \langle 0|x^3|0\rangle = \underline{0}$, und $\underline{\delta E_2} = \lambda^2 c_2\langle 0|V_2|0\rangle = \underline{c_2\lambda^2\frac{x_0^4}{4} \cdot 3}$. Wir benötigen noch

$$
\begin{aligned}
\frac{x_0^6}{8}\lambda^2 c_1^2 \sum_{n\neq 0}\frac{|\langle n|x^3|0\rangle|^2}{E_0 - E_n} &= \frac{x_0^6}{8}\lambda^2 c_1^2\left(\frac{9|\langle 1|a^\dagger|0\rangle|^2}{E_0 - E_1} + \frac{|\langle 3|(a^\dagger)^3|0\rangle|^2}{E_0 - E_3}\right) \\
&= \frac{x_0^6}{8}\lambda^2 c_1^2\left(\frac{9}{-\hbar\omega} + \left(\frac{(\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\cdot 1)^2}{-3\hbar\omega}\right)\right) \\
&= \underline{-\frac{\lambda^2 c_1^2 x_0^6}{\hbar\omega}\frac{11}{8}}\,.
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich der Ausdruck $E_0^{(2)} = \hbar\omega(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\lambda^2(3\frac{x_0^2 c_2}{\hbar\omega} - \frac{c_1^2 x_0^6}{(\hbar\omega)^2}\frac{11}{2}) + \mathcal{O}(\lambda^3))$. $\boxed{5{:}10}$

■ 3 (1) Eichtransformation: $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\Lambda$, $\Psi' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\Lambda}\Psi$. Einsetzen in

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}\hbar\gamma^\mu(\partial_\mu - \tfrac{\mathrm{i}e}{\hbar}A'_\mu)\Psi' - m\Psi' &= \mathrm{i}\hbar\gamma^\mu(\partial_\mu - \tfrac{\mathrm{i}e}{\hbar}(A_\mu + \partial_\mu\Lambda))\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\Lambda}\Psi - m\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\Lambda}\Psi \\
&= \mathrm{i}\hbar\gamma^\mu(\mathrm{i}\alpha(\partial_\mu\Lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\Lambda}\Psi + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\Lambda}\partial_\mu\Psi - \tfrac{\mathrm{i}e}{\hbar}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\Lambda}A_\mu\Psi \\
&\quad -\tfrac{\mathrm{i}e}{\hbar}(\partial_\mu\Lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\Lambda}\Psi) - m\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\Lambda}\Psi \\
&= 0\,,
\end{aligned}
$$

wenn $\alpha = \frac{e}{\hbar}$ gesetzt wird. 4:10

(2) Man bilde die Adjungierte der Dirac Gleichung, $-\mathrm{i}\hbar(\partial_\mu + \frac{\mathrm{i}e}{\hbar}A_\mu)\Psi^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger - m\Psi^\dagger = 0$. Das multipliziere man von rechts mit γ^0 und beachte $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$, $(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$, um zu der Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= -\mathrm{i}\hbar(\partial_\mu + \tfrac{\mathrm{i}e}{\hbar}A_\mu)\Psi^\dagger \underbrace{(-\gamma^\mu\gamma^0)}_{=\gamma^0\gamma^\mu} - m\Psi^\dagger\gamma^0 \\ &= -\mathrm{i}\hbar(\partial_\mu + \tfrac{\mathrm{i}e}{\hbar}A_\mu)\bar\Psi\gamma^\mu - m\bar\Psi \quad = \quad 0 \end{aligned}$$

zu kommen. Nun multipliziere man die diese Gleichung von rechts mit Ψ, die Dirac Gleichung von links mit $\bar\Psi$, und bilde die Differenz der beiden resultierenden Ausdrücke:

$$\begin{array}{rl} & \mathrm{i}\hbar(\bar\Psi\gamma^\mu\partial_\mu\Psi) - \mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{i}e}{\hbar}\bar\Psi\gamma^\mu A_\mu\Psi - m\bar\Psi\Psi \\ - & -\mathrm{i}\hbar(\partial_\mu\bar\Psi\gamma^\mu\Psi) - \mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{i}e}{\hbar}\bar\Psi\gamma^\mu A_\mu\Psi - m\bar\Psi\Psi \\ \hline = & \mathrm{i}\hbar\partial_\mu\underbrace{(\bar\Psi\gamma^\mu\Psi)}_{=j^\mu} \quad = \quad 0\,. \end{array}$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte $j^0 = \Psi^\dagger\Psi = \sum_{i=0}^3 |\psi_i|^2 \geq 0$ is positiv definit. 6:10

■ 4 (1) $H|1\rangle = \hbar\omega_1|1\rangle$, $H|2\rangle = \hbar\omega_2|2\rangle$. Mit $\mathrm{i}\hbar\partial_t\psi = (H+W)\psi$ und $\psi(t) = c_1(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_1 t}|1\rangle + c_2(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_2 t}|2\rangle$ erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\hbar\dot c_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_1 t} &= \omega_{11}c_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_1 t} + \omega_{12}c_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_2 t}\,, \\ \mathrm{i}\hbar\dot c_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_2 t} &= \omega_{21}c_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_1 t} + \omega_{22}c_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_2 t}\,. \end{aligned}$$

Dabei ist $\omega_{12} = \omega_{21}^*$ und ω_{11}, ω_{22} sind reell. Anfangsbedingungen sind $c_1(0) = 1$, $c_2(0) = 0$. Mit der Abkürzung $\omega_0 = \omega_2 - \omega_1$ wird das zu

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\hbar\dot c_1 &= \omega_{11}c_1 + \omega_{12}c_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}\,, \\ \mathrm{i}\hbar\dot c_2 &= \omega_{21}c_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t} + \omega_{22}c_2\,. \end{aligned}$$

Lösungsansatz: $c_1 = A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ und $c_2 = B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)t}$, womit man

$$\begin{array}{llll} (\omega_{11} - \hbar\omega)A & + \quad \omega_{12}B & = & 0\,, \\ \omega_{21}A & + \quad (\omega_{22} - \hbar\omega + \hbar\omega_0)B & = & 0 \end{array}$$

erhält. 5:10

(2) Auflösen nach ω liefert die Gleichung $\hbar^2\omega^2 - \hbar\omega(\omega_{11} + \omega_{22} + \hbar\omega_0) + \omega_{11}(\omega_{22} + \hbar\omega_0) - |\omega_{12}|^2 = 0$ mit den beiden Lösungen

$$\begin{aligned} \hbar\omega_\pm &= \frac{1}{2}(\omega_{11} + \omega_{22} + \hbar\omega_0) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\omega_{11} + \omega_{22} + \hbar\omega_0)^2 - \omega_{11}(\omega_{22} + \hbar\omega_0) + |\omega_{12}|^2} \\ &= \frac{1}{2}(\omega_{11} + \omega_{22} + \hbar\omega_0) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\omega_{22} - \omega_{11} + \hbar\omega_0)^2 + |\omega_{12}|^2}\,. \end{aligned}$$

Damit erhält man auch $B_\pm = \frac{\hbar\omega_\pm - \omega_{11}}{\omega_{12}}A_\pm$. 3:10

(3) Anfangsbedingungen sind erfüllt, wenn man geeignete Linearkombinationen aus beiden Lösungen betrachtet:

$$\begin{aligned} c_1(t) &= A_+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_+ t} + A_-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_- t}\,, \\ c_2(t) &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}(B_+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_+ t} + B_-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_- t})\,. \end{aligned}$$

Aus den Anfangsbedingungen folgt $c_1(0) = 1 \implies A_+ + A_- = 1$, und $c_2(0) = 0 \implies B_+ + B_- = 0$, also

$$\begin{aligned}
0 &= \tfrac{\hbar\omega_+ - \omega_{11}}{\omega_{12}} A_+ + \tfrac{\hbar\omega_- - \omega_{11}}{\omega_{12}} \underbrace{A_-}_{= 1 - A_+} , \\
\implies A_+ &= \tfrac{\omega_{11} - \hbar\omega_-}{\hbar(\omega_+ - \omega_-)} , \\
A_- &= -\tfrac{\omega_{11} - \hbar\omega_+}{\hbar(\omega_+ - \omega_-)} , \\
\implies B_+ &= \tfrac{1}{\omega_{12}} \tfrac{(\omega_{11} - \hbar\omega_-)(\omega_{11} - \hbar\omega_+)}{\hbar(\omega_+ - \omega_-)} \\
&= \tfrac{1}{\omega_{12}} \tfrac{\frac{1}{4}(\omega_{22} - \omega_{11} + \hbar\omega_0)^2 - \frac{1}{4}(\omega_{22} - \omega_{11} + \hbar\omega_0) - |\omega_{12}|^2}{\hbar(\omega_+ - \omega_-)} \\
&= -\tfrac{\omega_{12}}{\hbar(\omega_+ - \omega_-)} , \\
B_- &= -B_+ .
\end{aligned}$$

Damit erhält man schließlich

$$\begin{aligned}
c_2(t) &= B_+ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{1}{2}(\omega_+ + \omega_-)} \big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{1}{2}(\omega_+ - \omega_-)t} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}(\omega_+ - \omega_-)t}\big) \\
&= -2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{1}{2}(\omega_+ + \omega_-)} \sin\big(\tfrac{1}{2}(\omega_+ - \omega_-)t\big) , \\
|c_2(t)|^2 &= \tfrac{4\omega_{12}^2}{\hbar^2(\omega_+ - \omega_-)^2} \sin^2\big(\tfrac{1}{2}(\omega_+ - \omega_-)t\big) , \\
|c_1(t)|^2 &= 1 - |c_2(t)|^2 ,
\end{aligned}$$

für die Amplitudenquadrate. $\boxed{2{:}10}$