

Kurzlösungen zur Übungsklausur

[ÜK1] Eine Handvoll Quickies

(5 × 1 = 5 Punkte)

- (a) Gegeben ist die Oberfläche $\vec{x}(r, \varphi) = r(-\cosh(\varphi), \sinh(\varphi), 0)$. Welche Metrik $g_{..}$ besitzt die Oberfläche?

Lösung: Berechne zunächst die Tangentialvektoren

$$\vec{t}_r = (-\cosh(\varphi), \sinh(\varphi), 0) \quad , \quad \vec{t}_\varphi = r(-\sinh(\varphi), \cosh(\varphi), 0)$$

und deren Skalarprodukte

$$\begin{aligned} \vec{t}_r \cdot \vec{t}_r &= \cosh^2(\varphi) + \sinh^2(\varphi) \\ \vec{t}_r \cdot \vec{t}_\varphi &= 2 \sinh(\varphi) \cosh(\varphi) \\ \vec{t}_\varphi \cdot \vec{t}_\varphi &= \sinh^2(\varphi) + \cosh^2(\varphi) \end{aligned}$$

Dies in eine Matrix einbeschrieben ergibt die Metrik

$$g_{..} = \begin{pmatrix} \cosh^2(\varphi) + \sinh^2(\varphi) & 2 \sinh(\varphi) \cosh(\varphi) \\ 2 \sinh(\varphi) \cosh(\varphi) & \sinh^2(\varphi) + \cosh^2(\varphi) \end{pmatrix}$$

- (b) Man zeige mit einer geeigneten Testfunktion: $\frac{d}{dx}\theta(x) = \delta(x)$

Lösung: siehe [P13](b)

- (c) Wie folgt die homogene Wellengleichung $\square \vec{B} = \vec{0}, \square := \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \Delta$ aus den Maxwell-Gleichungen im Vakuum?

Lösung: siehe [P15](f)

- (d) Wie lautet die Stromdichte eines halbkreisförmig angeordneten Leiters in der x - y -Ebene, welcher von einem Strom I_0 durchflossen wird? Der Halbkreis habe den Radius R .

Lösung: Der Leiter liegt in der x - y -Ebene, es ist also nur eine Stromdichte für $z = 0$ vorhanden ($\rightarrow \delta(z)$). Der Leiter befindet sich auf einem Halbkreis um den Ursprung. Stromdichte herrscht nur für $r = R$ ($\rightarrow \delta(r - R)$) und zeigt in Richtung \vec{e}_φ :

$$\vec{j}(\vec{x}) = I_0 \delta(z) \delta(r - R) \vec{e}_\varphi,$$

was für $\varphi = 0, \dots, \pi$ gilt. Es ist also

$$\vec{j}(\vec{x}) = I_0 \delta(z) \delta(r - R) \vec{e}_\varphi (\theta(\varphi) - \theta(\varphi - \pi)).$$

- (e) Man berechne die Fourier-Transformierte eines Kastens

$$f(x) = \begin{cases} A & -x_0 \leq x \leq x_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lösung: Wir verwenden die 1D-Fourier-Transformation:

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ikx} f(x) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x_0}^{x_0} dx e^{-ikx}$$

Integration liefert

$$\begin{aligned} \tilde{f}(k) &= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{-ik} e^{-ikx} \Big|_{-x_0}^{+x_0} = 2 \frac{A}{\sqrt{2\pi} k} \frac{1}{2i} (e^{ikx_0} - e^{-ikx_0}) \\ &= \frac{2A}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(kx_0)}{k} \end{aligned}$$

[ÜK2] *Kleine Schwingungen*

(2 + 1 + 1 = 4 Punkte)

Ein Teilchen vollführe kleine Schwingungen um den Ursprung im Potential

$$V(x, y) = \frac{\kappa}{2} (\cosh(4x + 2y) - x \sin(2y) - 2x \sinh(4y - x) - 1 + 2xy)$$

- (a) Nähern Sie das Potential bis einschließlich zweite Ordnung um den Ursprung. Liegt dort ein Minimum vor?

Lösung: Entweder man stellt die 2D-Taylorentwicklung auf oder man kennt die Reihen vom cosh, sinh und sin:

$$\begin{aligned} \cosh(u) &= 1 + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} + \dots \\ \sinh(v) &= v + \frac{v^3}{3!} + \frac{v^5}{5!} + \dots \\ \sin(w) &= w - \frac{w^3}{3!} + \frac{w^5}{5!} \mp \dots \end{aligned}$$

Bis einschließlich zweite Ordnung gilt damit

$$\begin{aligned} \cosh(4x + 2y) &= 1 + \frac{16x^2 + 16xy + 4y^2}{2} = 1 + 8x^2 + 8xy + 2y^2 \\ \sinh(2y) &= 2y \\ \sin(4y - x) &= 4y - x \end{aligned}$$

Eingesetzt ist dies

$$\begin{aligned} V(x, y) &\approx \frac{\kappa}{2} (1 + 8x^2 + 8xy + 2y^2 - 2xy - 8xy + 2x^2 - 1 + 2xy) \\ &= \frac{\kappa}{2} (10x^2 + 2y^2) = \frac{\kappa}{2} (x, y) \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Matrix entspricht der Hesse-Matrix und ist wegen $10 > 0$ und $\det \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 20 > 0$ negativ definit. Damit liegt bei $(x, y) = (0, 0)$ ein Minimum vor.

- (b) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen des genäherten Systems und schreiben Sie diese in Matrixform $m\ddot{\vec{x}} = -\kappa A\vec{x}$.

Lösung: Die Bewegungsgleichungen folgen via $m\ddot{\vec{x}} = \vec{F} = -\nabla V$, hier also

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{pmatrix} = -\kappa \begin{pmatrix} 10x \\ 2y \end{pmatrix} = -\kappa \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Diese Bewegungsgleichungen sind schon entkoppelt!

- (c) Bestimmen Sie die Eigenschwingungen und Eigenfrequenzen des Systems. Wie lautet die allgemeine Bewegung $\vec{x}(t)$?

Lösung: Da das System der DGLs entkoppelt ist, können die Eigenfrequenzen direkt abgelesen werden: Es ist

$$m\ddot{x} = -\kappa \cdot 10x \Leftrightarrow \ddot{x}(t) = -\frac{10\kappa}{m}x(t) = -\omega_1^2 x(t) \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{10\kappa}{m}}$$

und weiterhin

$$m\ddot{y} = -\kappa \cdot 2y \Leftrightarrow \ddot{y}(t) = -\frac{2\kappa}{m}y(t) = -\omega_2^2 y(t) \Rightarrow \omega_2 = \sqrt{\frac{2\kappa}{m}}$$

Die Eigenschwingungen können direkt aus der Matrix abgelesen werden: $\vec{f}_1 = \vec{e}_1$ und $\vec{f}_2 = \vec{e}_2$. Damit ergibt sich Gesamtschwingung $\vec{x}(t)$ zu

$$\vec{x}(t) = A \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \vec{f}_1 + B \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

(bzw. Eigenfrequenzen und Eigenschwingungen eingesetzt)

[ÜK3] Maxwell-Gleichungen
Das magnetische Feld

(3 Punkte)

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \alpha t \cdot \vec{e}_\varphi$$

soll hergestellt werden. Durch eine geeignete Koordinatenwahl bestimme man mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen und einem geeigneten Ansatz das elektrische Feld \vec{E} , welches mindestens zur Herstellung erforderlich ist.

Lösung: Wir verwenden die dritte Maxwell-Gleichung, um \vec{E} aus \vec{B} zu bestimmen:

$$\nabla \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}} = -\alpha \vec{e}_\varphi = -\alpha \frac{(-y, x, 0)}{\rho},$$

wobei $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Damit beim Kreuzen in der dritten Koordinate eine Null herauskommt, probiere man den Ansatz

$$\vec{E} = (0, 0, f(\rho)).$$

Dann folgt beim Auskreuzen

$$\nabla \times \vec{E} = (\partial_y f(\rho), -\partial_x f(\rho), 0) = f'(\rho) \cdot \frac{(y, -x, 0)}{\rho}$$

Vergleiche dieses Resultat mit obigem Ergebnis:

$$f'(\rho) = \alpha \Rightarrow f(\rho) = \alpha t + C,$$

und da nach dem einfachsten Feld gefragt ist, kann $C = 0$ gesetzt werden. Es ergibt sich damit

$$\vec{E} = \alpha \rho \vec{e}_3$$

[ÜK4] Fourier-Transformation

(5 Punkte)

Berechnen Sie die Fourier-Transformierte $\tilde{f}(\vec{k})$ der Funktion

$$f(\vec{x}) = \alpha \frac{e^{-\kappa|\vec{x}|}}{|\vec{x}|}$$

und skizzieren Sie diese.

Lösung: Wir verwenden die 3D-Fourier-Transformation

$$\tilde{f}(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int d^3x e^{-i\vec{k}\vec{x}} f(\vec{x}).$$

Wichtig ist die Erkenntnis, dass f nur vom Abstand $|\vec{x}|$ abhängt. Wähle somit Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\vec{k}) &= \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}^3} \int_0^\infty dr r^2 \int_{-1}^1 d(\cos(\theta)) \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-ikr \cos(\theta)} \frac{e^{-\kappa r}}{r} \\ &= \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty dr r e^{-\kappa r} \int_{-1}^1 d(\cos(\theta)) e^{-ikr \cos(\theta)} \\ &= -\frac{\alpha}{\sqrt{2\pi} ik} \int_0^\infty dr e^{-\kappa r} (e^{-ikr} - e^{ikr}) \\ &= \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi} ik} \int_0^\infty dr (e^{-r(\kappa-ik)} - e^{-r(\kappa+ik)}) \\ &= \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi} ik} \left(\frac{1}{\kappa-ik} - \frac{1}{\kappa+ik} \right) \end{aligned}$$

Erweitern der Brüche mit dem Komplex-Konjugierten ergibt reelle Nenner:

$$\tilde{f}(\vec{k}) = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi} ik} \left(\frac{\kappa+ik - \kappa+ik}{\kappa^2+k^2} \right) = \frac{2\alpha}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\kappa^2+k^2} \right)$$

Das entspricht einer Glockenkurve!