

[P14] (b) Zu zeigen ist, dass  $G(t) = \theta(t)te^{-\gamma t}$  die zu dem Operator  $L = (\partial_t + \gamma)^2$  gehörende Greensche Funktion ist. Dazu wendet man zweimal den Operator  $L' = \partial_t + \gamma$  auf  $G$  an:

$$\begin{aligned} (\partial_t + \gamma)G &= (\partial_t + \gamma)\theta(t)te^{-\gamma t} \\ &= \delta(t)te^{-\gamma t} + \theta(t)e^{-\gamma t} - \theta(t)t\gamma e^{-\gamma t} + \gamma\theta(t)te^{-\gamma t} \\ &= \theta(t)e^{-\gamma t} \end{aligned}$$

denn  $t\delta(t) = 0$ . Nochmaliges Anwenden von  $L'$  liefert

$$\begin{aligned} (\partial_t + \gamma)^2 G &= (\partial_t + \gamma)\theta(t)e^{-\gamma t} \\ &= \delta(t)e^{-\gamma t} + \theta(t)(-\gamma)e^{-\gamma t} + \gamma\theta(t)e^{-\gamma t} \\ &= \delta(t)e^{-\gamma t} \end{aligned}$$

Ist  $G$  die Greensche Funktion zu  $L$  muss allerdings  $LG(t) = \delta(t)$  gelten. Nun ist aber  $\delta(t) = \delta(t)e^{-\gamma t}$ , denn

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \delta(t)e^{-\gamma t} f(t) = e^0 f(0) = f(0) \quad \Rightarrow \quad \delta(t) = \delta(t)e^{-\gamma t},$$

nach Definition der Deltafunktion. Also ist die gegebene Funktion  $G$  tatsächlich die Greensche Funktion zu  $L$ .

[P14]] (c) Hier soll nun die Greensche Funktion aus (b) hergeleitet werden. Betrachte dazu die Definitionsgleichung der Greenschen Funktion:

$$LG(t) = (\partial_t + \gamma)(\partial_t + \gamma)G(t) = \delta(t).$$

Substituiere nun  $(\partial_t + \gamma)G(t) =: u(t)$ . Dann folgt

$$(\partial_t + \gamma)u(t) = \dot{u}(t) + \gamma u = \delta(t).$$

Für den Operator  $L' = \partial_t$  haben wir in Aufgabe (a) bereits die Greensche Funktion  $G'(t) = \theta(t)$  gefunden. Ein sinnvoller Lösungsansatz für die Gleichung ist also  $u(t) = a(t)\theta(t)$ . Eingesetzt in die DGL ergibt sich

$$\dot{a}(t)\theta(t) + a(t)\delta(t) + \gamma a(t)\theta(t) = \delta(t).$$

Betrachtet man diese Gleichung für  $t \neq 0$  erhält man (da  $\delta(t) = 0 \forall t \neq 0$ )

$$\dot{a}(t)\theta(t) + \gamma a(t)\theta(t) = 0$$

und somit  $\dot{a}(t) = -\gamma a(t)$ . Für  $t = 0$  erhält man zusätzlich noch die Bedingung  $a(0) = 1$  was insgesamt

$$a(t) = e^{-\gamma t}, \quad \text{also} \quad u(t) = \theta(t)e^{-\gamma t}$$

bedeutet. Zu lösen bleibt nun noch

$$(\partial_t + \gamma)G(t) = u(t) = \theta(t)e^{-\gamma t}.$$

Ein sinnvoller Lösungsansatz ist hier  $G(t) = v(t)e^{-\gamma t}$  (Lösung der homogenen Gleichung und Variation der Konstanten). Für diesen Ansatz gilt

$$\dot{G}(t) = -\gamma e^{-\gamma t}v(t) + e^{-\gamma t}\dot{v}(t).$$

Eingesetzt in die DGL ergibt das

$$-\gamma e^{-\gamma t}v(t) + e^{-\gamma t}\dot{v}(t) + \gamma e^{-\gamma t}v(t) = \theta(t)e^{-\gamma t}$$

$$\Leftrightarrow \dot{v}(t) = \theta(t)$$

Integration liefert nun  $v(t) = t\theta(t)$ . Damit hat man schließlich das gesuchte Ergebnis

$$G(t) = t \cdot \theta(t)e^{-\gamma t}.$$