Aufgabe [P9] b)

Die Aufgabe ist mit Newton zu lösen, allerdings muss man sich hier die genaue Definition von Newtons Kraftgesetz in Erinnerung rufen:

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}} = \partial_t \left(m \cdot \dot{\vec{r}} \right) \qquad \curvearrowright \qquad K = \dot{m} \cdot \dot{x} + m \cdot \ddot{x} \qquad \text{für} \quad m = m(t) \tag{1}$$

Da wir auf einmal einen Term proportional zu Zeitableitung der Masse haben, wird die DGL zum etwas schwereren Fall, so dass *Aufleiten* nicht mehr gegeben ist. Die Lösung ist dann eine Kombination von neuer Funktion und Variation der Konstanten.

$$m(t) = \frac{m_0}{1+\alpha t} \qquad\qquad p = \frac{m_0}{1+\alpha t} \cdot \dot{x}$$

$$\begin{aligned}
&\partial_t \left(m \cdot \dot{\vec{x}} \right) = \dot{m}\dot{x} + m\ddot{x} = m_0\kappa := K \\
&\Leftrightarrow -\frac{m_0\alpha}{(1+\alpha t)^2} \cdot \dot{x} + \frac{m_0}{(1+\alpha t)} \cdot \ddot{x} = m_0\kappa \qquad \Big| : m_0 \Big| \cdot (1+\alpha t) \\
&\Leftrightarrow \ddot{x} = \kappa + \frac{\alpha}{(1+\alpha t)} \cdot \dot{x} \quad \curvearrowright \quad \boxed{\ddot{x} = \kappa + \frac{\alpha}{(1+\alpha t)} \cdot \dot{x} \quad , \quad \dot{x}(0) = 0 \quad , \quad x(0) = 0}
\end{aligned}$$

Zunächst lösen wir das Problem für $\dot{x}$ und setzen $\dot{x} = u$, dann ist nur noch

$$\dot{u} = \kappa(1+\alpha t) + \frac{\alpha}{(1+\alpha t)} \cdot u$$

zu lösen. Wir nehmen hier die Variation der Konstanten a, in dem wir $u = a(t) \cdot b(t)$ wählen. Wenn wir u dann nach Produktregel ableiten, bekommen wir zwei Terme, die wir benutzen können, um den Eindeutigkeitsrahmen zu splitten. (Man kann auch a zunächst konstant annehmen, die linke Seite ist die homogene Lösung, und die rechte ist die inhomogene mit $a = a(t)$)

$$\dot{u} = \dot{a}b + \dot{b}a \overset{!}{=} \frac{\alpha}{(1+\alpha t)}(a \cdot b) + \kappa(1+\alpha t)$$

$$\boxed{\dot{b}a \overset{!}{=} \frac{\alpha}{(1+\alpha t)}(a \cdot b) \Leftrightarrow \dot{b} = \frac{\alpha}{(1+\alpha t)} \cdot b}$$

Das Auto bewegt sich, also können wir $b \neq 0$ annehmen:

$$\frac{\dot{b}}{b} = \frac{\alpha}{(1+\alpha t)}$$

$$\Leftrightarrow \partial_t \ln(b) = \frac{a}{(1+\alpha t)} = \partial_t \left(\ln(1+\alpha t) + C \right)$$

$$\curvearrowright \ln(b) = (\ln(1+\alpha t) + C)$$

und schließlich:

$$b(t) = (1+\alpha t) \cdot e^C$$

$$\boxed{\dot{a}b \overset{!}{=} \kappa(1+\alpha t)}$$

Hier benutzen wir das linke Ergebnis und setzen ein:

$$\dot{a}(a+\alpha t) \cdot e^C \overset{!}{=} \kappa(1+\alpha t)$$

$$\curvearrowright \dot{a}t = \kappa \cdot e^{-C}$$

$$\curvearrowright a(t) = \kappa e^{-C} \cdot t + D$$

Multipliziert erhalten wir für u

$$u(t) = (\kappa t + D)(1+\alpha t) = \kappa\alpha t^2 + \kappa t + D\alpha t + D = \dot{x}(t)$$

Aus der Anfangsbedingung $\dot{x}(0) = 0$ folgt $D = 0$. Die Lösung von $x(t)$ erhält man dann endlich doch durch Aufleiten:

$$\dot{x}(t) = \kappa t + \kappa\alpha t^2 \qquad \curvearrowright x(t) = \frac{\kappa\alpha}{3}t^3 + \frac{\kappa}{2}t^2$$

Die Konstante, die noch dazu gehört hätte, ergibt sich wegen $x(0) = 0$ wiederum zu Null. Wir haben also die Allgemeine Lösung gefunden!