Klausur THEORETISCHE PHYSIK I Prof. Dietrich Zawischa
Lösungen 9. Februar 2002

[K1] Das System hat zwei Freiheitsgrade. Es ist $L = T_{trans} + T_{rot} - V$. Wir haben

$$
\begin{aligned}
T_{trans} &= \frac{1}{2}M(\dot{x}^2+\dot{y}^2) = \frac{1}{2}M(\ell^2\dot{\varphi}^2 + a^2\dot{\psi}^2 + 2a\ell\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos(\varphi-\psi))\,,\\
T_{rot} &= \frac{1}{2}\Theta\,\dot{\psi}^2\,,\\
V &= -Mg(\ell\cos\varphi + a\cos\psi)\,.
\end{aligned}
$$

Hierbei haben wir verwendet: $x = \ell\cos\varphi + a\cos\psi$, $y = \ell\sin\varphi + a\sin\psi$ für die Koordinaten des Schwerpunktes (x zeigt senkrecht nach unten, y nach rechts). Also sind $\dot{x} = -\ell\sin\varphi\,\dot{\varphi} - a\sin\psi\,\dot{\psi}$, $\dot{y} = \ell\cos\varphi\,\dot{\varphi} + a\cos\psi\,\dot{\psi}$. Daraus ergeben sich die Bewegungsgleichungen

$$
\begin{aligned}
\ell\ddot{\varphi} + a\ddot{\psi}\cos(\varphi-\psi) + a\dot{\psi}^2\sin(\varphi-\psi) + g\sin\varphi &= 0\,,\\
(a+\frac{\Theta}{Ma})\ddot{\psi} + \ell\ddot{\varphi}\cos(\varphi-\psi) - \ell\dot{\varphi}^2\sin(\varphi-\psi) + g\sin\psi &= 0\,.
\end{aligned}
$$

Sind beide Winkel sehr klein, und gilt außerdem $\varphi \approx \psi$, so können wir $\cos(\varphi-\psi)\approx 1$, $\sin(\varphi-\psi)\approx 0$ und $\sin(\alpha)\approx\alpha$ für $\alpha = \phi,\psi$ setzen. Dann vereinfachen sich die Gleichungen zu

$$
\begin{aligned}
\ell\ddot{\varphi} + a\ddot{\psi} + g\varphi &= 0\,,\\
\ell\ddot{\varphi} + (a+\frac{\Theta}{Ma})\ddot{\psi} + g\psi &= 0\,.
\end{aligned}
$$

[K2] $U = \frac{k}{2n+2}x^{2n+2}$. Energiesatz: $\frac{m}{2}\dot{x}^2 + U(x) = E = const$. Also:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}T(A) &= \int_{-A}^{A}\mathrm{d}x\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U)}} = \int_{-A}^{A}\mathrm{d}x\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}\frac{k}{2n+2}}\sqrt{A^{2n+2}-x^{2n+2}}}\\
&\stackrel{y=x/A}{=} 2A\sqrt{\frac{m(n+1)}{k}}\frac{1}{A^{n+1}}\int_0^1\mathrm{d}y\frac{1}{\sqrt{1-y^{2n+2}}}\,.
\end{aligned}
$$

Offenbar ist also $T \sim A^{-n}$.

[K3] Man erhält mit dem Vektor $\boldsymbol{\eta}$ der generalisierten Koordinaten sofort

$$
T = \tfrac{1}{2}\,\dot{\boldsymbol{\eta}}\begin{pmatrix} a & \\ & b\end{pmatrix}\dot{\boldsymbol{\eta}}\,,\qquad V = \tfrac{k}{2}\,\boldsymbol{\eta}\begin{pmatrix} 1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{\eta}\,.
$$

Zu berechnen ist

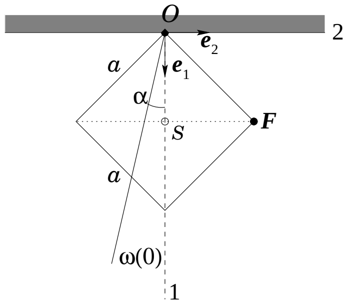
$$
\det\left[\begin{pmatrix} 1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix} - \frac{\omega^2}{k}\begin{pmatrix} a & \\ & b\end{pmatrix}\right] = 0 = (1-\frac{\omega^2}{k}a)(1-\frac{\omega^2}{k}b)-1 = \frac{\omega^4\{k^2}{a}b - \frac{\omega^2\{k}{(}a+b)\,.
$$

Die Eigenwerte sind also $\omega^2 = 0$ und $\omega^2 = k\frac{a+b}{ab}$. Die zugehörigen Eigenvektoren lauten

$$
\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad\text{bzw.}\quad \frac{1}{\sqrt{1+\left(1-\frac{a+b}{ab}\right)^2}}\begin{pmatrix}1\\ 1-\frac{a+b}{ab}\end{pmatrix}\,.
$$

Der erste Eigenvektor ergibt eine gleichsinnige, der zweite eine gegensinnige Bewegung.

[K4] Stoßkraft zur Zeit $t = 0$ ist $\mathbf{F} = -\Delta p\delta(t)\mathbf{e}_3$, $\Delta p > 0$. Drehimpulssatz bezüglich O liefert



$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{N} = \frac{a}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \times (-\Delta p)\delta(t)\mathbf{e}_3 + \mathbf{N}_S\,,$$

wobei $\mathbf{N}_S$ das Drehmoment der Schwerkraft ist. Dieses verschwindet zur Zeit $t = 0$, so dass sofort

$$\mathbf{L}(O) = \frac{a\Delta p}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1)$$

integriert werden kann. Das Koordinatensystem $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ist bereits das Hauptachsensystem. Also ist $I^{(O)} = I_1\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + I_2\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + I_3\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3$. Mit $\mathbf{L}(O) = I^{(O)}\omega(O) = I_1\omega_1(O)\mathbf{e}_1 + I_2\omega_2(O)\mathbf{e}_2 + I_3\omega_3\mathbf{e}_3$ liest man ab:

$$\left.\begin{array}{lcl} \omega_1(O) & = & -\frac{a\Delta p}{\sqrt{2}}\frac{1}{I_1} \\ \omega_2(O) & = & \frac{a\Delta p}{\sqrt{2}}\frac{1}{I_2} \\ \omega_3(O) & = & 0 \end{array}\right\} \implies \omega(O) = \frac{a\Delta p}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{I_1}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{I_2}\mathbf{e}_2\right)\,.$$

Wir finden $\omega(O) = \frac{a\Delta p}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{I_1^2} + \frac{1}{I_2^2}\right)^{1/2}$ und $\tan\alpha = \left|\frac{\omega_2(O)}{\omega_1(O)}\right| = \frac{I_1}{I_2}$. Die Trägheitsmomente (nach dem Satz von Steiner) sind

$$I^{(O)} = I^{(S)} + M\left(\frac{a^2}{2}\mathbb{1} - \frac{a^2}{2}\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1\right) = I^{(S)} + M\frac{a^2}{2}\left(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3\right)\,.$$

Aus Symmetriegründen ist jedes System $\{1', 2', 3'\}$ in S mit $3'$-Achse senkrecht zur Platte ein Hauptachsensystem, und es gilt:

$$I^{(S)} = \frac{1}{12}Ma^2\left(\mathbf{e}_{1'} \otimes \mathbf{e}_{1'} + \mathbf{e}_{2'} \otimes \mathbf{e}_{2'}\right) + \frac{1}{6}Ma^2\mathbf{e}_{3'} \otimes \mathbf{e}_{3'}\,.$$

Also ist $I_1 = \frac{1}{12}Ma^2$, $I_2 = \frac{1}{12}Ma^2 + \frac{1}{2}Ma^2 = \frac{7}{12}Ma^2$, $I_3 = \frac{1}{6}Ma^2 + \frac{1}{2}Ma^2 = \frac{2}{3}Ma^2$. Damit ergibt sich $\tan\alpha = \frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{7}$, also $\alpha \approx 8°\,8'$.

[K5] Es ist

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}^3r'\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Q}{4\pi R^2}\,\omega \times \int \mathrm{d}^3r'\delta(r' - R)\frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \equiv \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Q}{4\pi R^2}\,\omega \times \mathbf{I}\,.$$

Man wähle die z'-Richtung entlang $\mathbf{r}$ (Rotationssymmetrie bzgl. dieser Achse).

$$\begin{aligned}
\mathbf{I} &= \int_0^\pi \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \int_0^\infty r'^2\mathrm{d}r'\delta(r' - R)\frac{R}{\sqrt{r'^2 + r^2 - 2rr'\cos\theta}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\,\mathbf{e}_{r'} \\
&= 2\pi\mathbf{e}_r\int_0^\pi \cos\theta\,\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^\infty r'^2\mathrm{d}r'\delta(r' - R)\frac{R}{\sqrt{r'^2 + r^2 - 2rr'\cos\theta}} \\
&= 2\pi\mathbf{e}_r\int_0^\pi \cos\theta\,\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\frac{R^3}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR\cos\theta}} \\
&\overset{\cos\theta = t}{=} 2\pi R^3\mathbf{e}_r\int_{-1}^1 \frac{t\mathrm{d}t}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rRt}} \\
&= \frac{2\pi R^3}{3(rR)^2}\mathbf{e}_r\left((R^2 + r^2 - rR)(R + r) - (R^2 + r^2 + rR)\sqrt{(R - r)^2}\right) \\
&= \mathbf{e}_r\begin{cases} \frac{4\pi rR}{3} & \text{falls} \quad R > r\,, \\ \frac{4\pi R^4}{3r^2} & \text{falls} \quad R < r\,. \end{cases}
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich also

$$\mathbf{A} = \begin{cases} \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Q}{3R}\,\omega\times\mathbf{r} & \text{falls} \quad R > r\,, \\ \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{QR^2}{3}\,\omega\times\frac{1}{r^3}\mathbf{r} & \text{falls} \quad R < r\,. \end{cases}$$

Um das Integral nach der Substitution auszuwerten, verwende man (laut Hinweis)

$$\int \mathrm{d}t\frac{t}{\sqrt{a-bt}} \overset{u=a-bt}{=} -\frac{1}{b^2}\int \mathrm{d}u\left(\frac{a}{\sqrt{u}}-\sqrt{u}\right) = -\frac{\sqrt{u}}{b^2}(a-3u) = -\frac{2}{3b^2}(2a+bt)\sqrt{a-bt}\,.$$

[K6] Mit $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ wie gegeben ist offensichtlich

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3r'\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,.$$

Fernfeld: $r \gg \ell$. Man entwickele $k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = k(r^2+2\mathbf{r}\mathbf{r}'+r'^2)^{1/2} = kr(1-2\frac{\mathbf{r}\mathbf{r}'}{r^2}+\frac{r'^2}{r^2})^{1/2} = kr - k\frac{\mathbf{r}\mathbf{r}'}{r} + \mathcal{O}(\frac{k\ell^2}{r})$. Der zweite Term ist $\mathcal{O}(\ell)$, der dritte ist vernachlässigbar. Damit erhält man

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \mathbf{e}_z\frac{k}{c}\int_0^\ell \mathrm{d}z'\frac{1}{kr(1-\frac{zz'}{r^2})}\sin(k(\ell-z'))\sin(\omega t - kr + k\frac{zz'}{r})\,.$$

In der xy-Ebene ist $z=0$, was alles schön vereinfacht:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) &= \mathbf{e}_z\frac{1}{rc}\int_0^\ell \mathrm{d}z'\sin(k(\ell-z'))\sin(\omega t-kr) \\ &= \mathbf{e}_z\frac{1}{krc}\sin(\omega t-kr)\cos(k(\ell-z'))\Big|_0^\ell \quad = \quad \mathbf{e}_zA_z(\mathbf{r},t)\end{aligned}$$

mit $A_z(\mathbf{r},t) = \frac{1}{ckr}(1-\cos k\ell)\sin(\omega t-kr)$. Daraus ergibt sich $\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \partial_yA_z\mathbf{e}_x - \partial_xA_z\mathbf{e}_y$. Man beachte $\partial_{x_i}f(r) = (\partial_{x_i}r)\partial_rf = \frac{x_i}{r}\partial_rf$, und erhält

$$\begin{aligned}\partial_yA_z(\mathbf{r},t) &= \frac{1}{ckr}(1-\cos k\ell)(-k)\cos(\omega t-kr)\frac{y}{r}+\mathcal{O}(r^{-3})\,, \\ -\partial_xA_z(\mathbf{r},t) &= -\frac{1}{ckr}(1-\cos k\ell)(-k)\cos(\omega t-kr)\frac{x}{r}+\mathcal{O}(r^{-3})\,.\end{aligned}$$

Dies führt schließlich zum Ergebnis

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{cr}(1-\cos k\ell)\cos(\omega t-kr)\begin{pmatrix}-\frac{y}{r}\\ \frac{x}{r}\\ 0\end{pmatrix} = \frac{1}{cr}(1-\cos k\ell)\cos(\omega t-kr)\mathbf{e}_\varphi$$

bis auf (im Fernfeld vernachlässigbare) Terme der Ordnung $\mathcal{O}(r^{-3})$.

[K7] $\mathbf{E} = -\partial_t\mathbf{A}$, $\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$. Also ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \mathrm{i}\omega A_0(\mathbf{e_x}+\mathrm{i}\mathbf{e}_y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)} \;=\; kcA_0(-\mathbf{e}_y+\mathrm{i}\mathbf{e}_x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}\,, \\ \mathbf{B} &= A_0\left(\nabla\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}\right)\times(\mathbf{e_x}+\mathrm{i}\mathbf{e}_y) \;=\; A_0\mathrm{i}k\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}\mathbf{e}_z\times(\mathbf{e_x}+\mathrm{i}\mathbf{e}_y)\,.\end{aligned}$$

Der Poynting-Vektor ist dann

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\times\mathbf{B} &= k^2cA_0^2\,\Re\mathrm{e}\left((-\mathbf{e}_y+\mathrm{i}\mathbf{e}_x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}\right)\times\Re\mathrm{e}\left((\mathbf{e_x}+\mathrm{i}\mathbf{e}_y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}\right) \\ &= k^2cA_0^2\left(-\mathbf{e}_y\cos(kz-\omega t)-\mathbf{e}_x\sin(kz-\omega t)\right) \\ &\qquad\times\left(\mathbf{e}_x\cos(kz-\omega t)-\mathbf{e}_y\sin(kz-\omega t)\right) \\ &= k^2cA_0^2\left(\mathbf{e}_z\cos^2(kz-\omega t)+\mathbf{e}_z\sin^2(kz-\omega t)\right) \;=\; k^2cA_0^2\mathbf{e}_z \;=\; \mu_0\mathbf{S}\,.\end{aligned}$$

[K8] $p^\mu = (E/c, p\cos\varphi, p\sin\varphi, 0)$ in Σ mit $p = \sqrt{\left(\frac{E}{c}\right)^2-(mc)^2}$. Nun Lorentztransformation: $\frac{E'}{c} = \gamma\left(\frac{E}{c}-\frac{v}{c}p\cos\varphi\right)$ mit $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$. Damit ist $E' = \gamma\left(E - v\cos\varphi\sqrt{\left(\frac{E}{c}\right)^2-(mc)^2}\right)$.