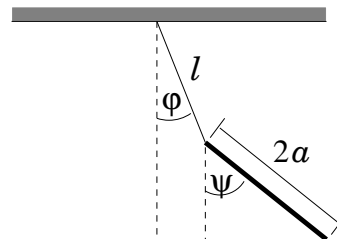


- [K1] *Doppelpendel*: Ein Stab der Länge $2a$ mit Masse M und Trägheitsmoment im Schwerpunkt Θ sei an einem masselosen Faden der Länge ℓ aufgehängt. Wieviele Freiheitsgrade hat dieses ebene Problem? Stellen Sie die Lagrangefunktion auf und bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen. Wie vereinfachen sich die Bewegungsgleichungen im Falle kleiner Auslenkungen?

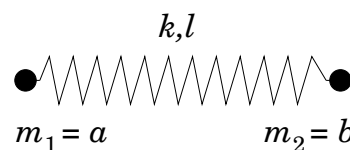


(4 P.)

- [K2] *Periodische Bewegung*: Ein Teilchen bewege sich in einer Dimension unter dem Einfluß der Kraft $F = -kx^{2n+1}$, wobei n ganzzahlig sei. Wie hängt die Periode T der oszillatorischen Bewegung um den Ursprung von der Amplitude A ab?

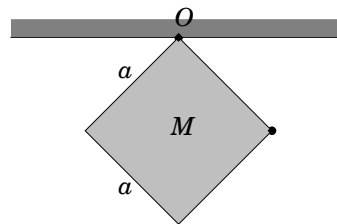
(3 P.)

- [K3] *Eigenschwingungen*: Bestimmen Sie für ein eindimensionales System zweier Massen, die durch eine Feder der Länge ℓ und Federkonstante k entlang der x -Achse gekoppelt sind, die Frequenzen kleiner Schwingungen und die dazugehörigen Eigenvektoren.



(3 P.)

- [K4] *Starrer Körper*: Eine quadratische homogene Platte der Seitenlänge a und Masse M ist wie skizziert frei drehbar um eine Ecke vertikal aufgehängt. Um welche Achse (durch den Aufhängepunkt O) dreht sich die Platte unmittelbar nach einem Stoß senkrecht zur Platte auf einen der beiden äußeren Eckpunkte?



Hinweise: Der Drehimpulssatz kann wegen $\mathbf{F} = \Delta \mathbf{p} \delta(t)$ direkt integriert werden. Der Trägheitstensor im Schwerpunkt lautet

$$I^{(S)} = \frac{1}{12} M a^2 \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

für jedes Koordinatensystem mit der dritten Achse senkrecht zur Platte.

(5 P.)

- [K5] *Vektorpotential einer rotierenden Kugel*: Eine Kugel mit dem Radius R habe eine homogene Oberflächenladungsdichte mit Gesamtladung Q und drehe sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z$ um die z -Achse. Geben Sie die Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ und die Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ an, und berechnen Sie das Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ innerhalb und außerhalb der Kugel.

Hinweise: Schreiben Sie $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \boldsymbol{\omega} \times \int d^3 r' \dots$ und führen Sie die Integration in Kugelkoordinaten aus. Treffen Sie eine geschickte Wahl für die Polarachse, so dass sich zwei Integrationen einfach ausführen lassen. Substituieren Sie für die verbleibende Integration $\cos \theta = t$. Achten Sie zur weiteren Auswertung auf die Fallunterscheidung $r < R$ und $r > R$. Es ist $\int dt \frac{t}{\sqrt{a-bt}} = -\frac{2}{3b^2} (2a+bt) \sqrt{a-bt}$.

(5 P.)

- [K6] *Fernfeld eines Antennenstabes*: Betrachten Sie einen Antennenstab, der sich auf der z -Achse von $z = 0$ bis $z = \ell$ erstreckt. In diesem Stab herrsche die Stromdichte

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}_0(\mathbf{r}) \sin(\omega t), \quad \mathbf{j}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_z \sin(k(\ell - z)) \delta(x) \delta(y) \theta(z) \theta(\ell - z).$$

Bringen Sie das Vektorpotential auf die Form

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \dots \int_0^\ell dz' \dots \sin(\omega t - kr + \dots),$$

wobei Terme der Ordnung $k\ell^2/r$ im Fernfeld vernachlässigt werden können. Berechnen Sie daraus $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ in der xy -Ebene. Bestimmen Sie den führenden Term des \mathbf{B} -Feldes für $r \rightarrow \infty$. (4 P.)

[K7] *Zirkular polarisierte Welle*: Die Potentiale einer zirkular polarisierten, in z -Richtung propagierenden, ebenen Welle lassen sich bequem in komplexer Schreibweise angeben:

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}, t) &= 0, \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= A_0(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y)e^{i(kz - \omega t)},\end{aligned}$$

wobei $\omega = kc$. Bei dieser eleganten Schreibweise meint man natürlich nur den Realteil. Berechnen Sie das elektrische Feld und die magnetische Feldstärke, sowie anschließend die Energiestromdichte (Poynting-Vektor). (4 P.)

[K8] *Lorentztransformation*: Ein Teilchen der Ruhemasse m besitze in dem Inertialsystem Σ eine Geschwindigkeit proportional zu $(\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$ und eine Energie E . Bestimmen Sie die Energie E' des Teilchens in einem Inertialsystem Σ' , das sich mit Geschwindigkeit v relativ zu Σ in x -Richtung bewegt, als Funktion von E und v . (4 P.)