[P1] *Lorentz-Transformation des Feldes*: Bestimmen Sie das elektrische und magnetische Feld eines gleichförmig bewegten geladenen Teilchens aus der Lorentz-Transformation des Coulomb Feldes.

[H1] *Relativistische Bewegung in einem konstanten Feld*: Die relativistische Bewegung eines Punktteilchens mit der Ladung e und der Masse m in einem konstanten homogenen Feld wird beschrieben durch die Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt}(m\gamma\boldsymbol{v}) = e(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \ .$$

(1) Zeigen Sie, daß diese Gleichung, zusammen mit der Variation der Energie $\mathcal{E}$,

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = e\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{v} \ ,$$

kompakt geschrieben werden kann als

$$m\frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{e}{c}F^{\mu\nu}u_\nu \ ,$$

wobei $u^\mu = dx^\mu/d\tau$ die Vierergeschwindigkeit, τ die Eigenzeit und $F^{\mu\nu}$ der antisymmetrische elektromagnetische Feldtensor ist:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

(2) Lösen Sie die Bewegungsgleichung in Viererschreibweise auf folgende Weise: Führen Sie anstelle von u eine 2×2-Matrix $\underline{u}$ ein:

$$\underline{u} = u_0\mathbb{1} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\sigma} \ ,$$

wobei $\boldsymbol{\sigma}$ der Vektor der Pauli-Matrizen (Generatoren der SU(2)) ist, d.h.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ .$$

Zeigen Sie, daß die Bewegungsgleichung geschrieben werden kann als

$$\frac{d}{d\tau}\underline{u} = \frac{e}{mc}\left(\frac{\boldsymbol{E} + i\boldsymbol{B}}{2} \cdot \boldsymbol{\sigma}\underline{u} + \underline{u}\frac{\boldsymbol{E} - i\boldsymbol{B}}{2} \cdot \boldsymbol{\sigma}\right) \ ,$$

wobei Sie die Identität

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\mathbb{1} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$$

ausnutzen. Die Gleichung kann nun einfach gelöst werden. Entwickeln Sie die auftauchenden Exponentialfunktionen und zeigen Sie, daß sie jeweils als Summe von zwei Termen geschrieben werden können. Wie lautet somit für den Fall $\underline{u}(0) = \mathbb{1}$ und $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ die Lösung für $\underline{u}(\tau)$? (0 P.)