

- [P1] *Infinitesimale kanonische Transformation:* Es soll die Wirkung einer infinitesimalen kanonischen Transformation untersucht werden. Sie habe die Erzeugende

$$F(q, P) = qP + \epsilon G(q, P)$$

mit einem infinitesimalen ϵ .

- (1) Geben Sie die Änderung von q und p unter dieser kanonischen Transformation an. Schreiben Sie das Resultat mit Hilfe von Poissonklammern.
(*Hinweis:* Überlegen Sie sich, warum man hier $G(q, P)$ durch $G(q, p)$ ersetzen kann)
 - (2) Betrachten Sie den Spezialfall $G = H$ und $\epsilon \equiv dt$. Welche Bedeutung hat dieser Spezialfall?
 - (3) Geben Sie nun die Änderung an, die eine allgemeine Funktion $u(q, p)$ der Koordinaten und Impulse unter der infinitesimalen kanonischen Transformation erfährt. Verwenden Sie wieder die Definition der Poissonklammern und betrachten Sie erneut den Spezialfall $G \equiv H$ und $\epsilon \equiv dt$.
 - (4) Als Beispiel einer infinitesimalen Transformation soll eine infinitesimale Drehung untersucht werden. Wie ändert sich der Ortsvektor \mathbf{r} bei einer infinitesimalen Drehung um die Achse \mathbf{n} mit dem Drehwinkel $\delta\varphi$? Wie ändert sich daher eine allgemeine Funktion $a(\mathbf{r})$ des Ortes? Wählen Sie $\mathbf{n} = \hat{e}_z$ und setzen Sie das Resultat in Beziehung zu der Poissonklammer des Drehimpulses l_z mit der Größe $a(\mathbf{r})$.
- [P2] *Kanonische Transformation:* Kanonische Transformationen sind Transformationen der Variablen p und q und der Hamiltonfunktion, die die Struktur der kanonischen Gleichungen unverändert lassen. Gegeben sei die Hamiltonfunktion $H(q, p) = \frac{p^2 q^4}{2m} + \frac{k}{2q^2}$ und die Erzeugende $F(q, Q) = \alpha \frac{Q}{q}$. Bestimmen Sie $p = p(Q, P)$. Transformieren Sie die Hamiltonfunktion $H(q, p) \rightarrow H'(Q, P)$. Bei welcher Wahl von α erhalten Sie eine wohlbekannte Gestalt von $H(Q, P)$?

- [H1] *Geladenes Teilchen im statischen elektromagnetischen Feld:* Gegeben sei ein geladenes Teilchen (Ladung q) in folgendem Feld:

$$\mathbf{B} = b\hat{e}_z \quad \mathbf{E} = E_x\hat{e}_x + E_y\hat{e}_y$$

Bestimmen Sie das Vektorpotential in Coulomb-Eichung ($\nabla\mathbf{A} = 0$). Stellen Sie nun die Hamiltonfunktion auf und leiten Sie daraus die Bewegungsgleichung ab. Die Bewegungsgleichungen für x , y können durch Einführen einer komplexen Variablen $z = x + iy$ zu einer Bewegungsgleichung zusammengefaßt werden. Lösen Sie diese Bewegungsgleichung zu der Anfangsbedingung: $z(t=0) = x_0 + iy_0$, $y_0 = 0$. Bestimmen Sie $r(t) = \sqrt{z(t)z^*(t)}$ sowie den Real/Imaginärteil der Lösung. Skizzieren Sie die Bahnkurve. (3 P.)

- [H2] *Poissonklammern:*

- (1) Betrachten Sie die Hamiltonfunktion des Keplerproblems $H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{\alpha}{r}$, mit $r^2 = \sum_i x_i^2$, und berechnen Sie die Poissonklammern $\{H, x_i\}$ sowie $\{H, p_i\}$. Der Drehimpuls sei wie üblich gemäß $l_i = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} x_j p_k$ definiert. Weisen Sie nach, dass l_i eine Erhaltungsgröße ist.
- (2) Zeigen Sie, dass der sogenannte Lenz-Runge Vektor $\mathbf{\Lambda}$, definiert durch $\Lambda_i = \sum_j k\epsilon_{ijk} p_j l_k - \alpha m x_i / r$, ebenfalls erhalten ist.
- (3) Berechnen Sie die Poissonklammer $\{l_i, l_j\}$ und zeigen Sie mit dem Ergebnis, dass ein System, das invariant unter Drehung um die x - und y -Achse ist, auch invariant unter Drehung um die z -Achse ist. (4 P.)

- [H3] *Akrobatik im drehenden Karusell:* Ein Zirkusakrobat erarbeitet ein Kunststück, bei dem er in einem Karusell fährt und eine Kugel so in die Höhe werfen möchte, dass sie nach einer halben Umdrehung wieder aufgefangen werden kann. Das Karusell hat den Radius R und dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit Ω entgegen dem Uhrzeigersinn. Sowohl die Reibung als auch die Erdrotation können bei der Bewegung der Kugel vernachlässigt werden.

- (1) Unmittelbar vor dem Start des Karusells unternimmt der Akrobat einen erfolgreichen Probewurf von $(-R, 0, 0)$ nach $(R, 0, 0)$, wo er die Kugel im fahrenden Karusell wieder auffängt. Welche Anfangsgeschwindigkeit v_0 und welchen Winkel α gegen die Horizontale mußte der Akrobat dazu wählen?
- (2) Die Wiederholung des Wurfes bei rotierendem Karusell erbringt nicht das gewünschte Ergebnis. Welche Anfangsgeschwindigkeit \mathbf{v}_0 hätte der Akrobat der Kugel erteilen müssen? Lösen Sie das Problem auf zweierlei Weise:
 - (i) Im Inertialsystem mit anschließender Transformation in das rotierende System.
 - (ii) Im rotierenden System. (3 P.)