

Theoretische Physik II - Quantentheorie I

Hausübung, Blatt 12

SS 04 Abgabetermin: 13.07.2004

[H34] Sphärischer Potentialtopf

(4 Punkte)

Gegeben sei das dreidimensionale Potential

$$V(\vec{r}) = \begin{cases} -V_0 & \text{für } |\vec{r}| \leq R \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{mit } V_0 > 0 \quad \text{und} \quad R > 0.$$

- (a) Machen Sie einen Separationsansatz für den Winkel- und Radialanteil der stationären Wellenfunktion und formulieren Sie die radiale Schrödingergleichung. Man überprüfe explizit, dass

$$j_0 = \frac{\sin z}{z} \quad \text{und} \quad n_0 = -\frac{\cos z}{z}$$

mit geeignetem z Lösungen der radialen Gleichung für $\ell=0$ sind.

- (b) Wie lauten bei $\ell=0$ die physikalisch erlaubten Wellenfunktionen der Bindungszustände im Innen- und Außenraum?

Hinweis: Im Außenraum wähle man zweckmäßigerweise die Hankelfunktionen $h_\ell^+ = j_\ell + in_\ell$ und $h_\ell^- = j_\ell - in_\ell$ als Basislösungen.

- (c) Zeigen Sie, dass die Anschlußbedingung bei $r=R$ auf folgende Gleichung führt:

$$\tan x = -\frac{x}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} \quad \text{mit} \quad x = \sqrt{\frac{2mR^2}{\hbar^2}(V_0 - |E|)} \quad \text{und} \quad \alpha^2 = \frac{2m}{\hbar^2}V_0R^2.$$

Diskutieren Sie die Bestimmungsgleichung für die Energie-Eigenwerte. Fertigen Sie dazu eine Skizze an.

[H35] Starrer Rotator

(3 Punkte)

Der Hamilton-Operator eines starren Rotators in einem homogenen Magnetfeld \vec{B} ist

$$H_0 = \frac{\hbar^2}{2\Theta} \vec{L}^2 + g\hbar \vec{B} \cdot \vec{L},$$

wobei Θ das Trägheitsmoment und g das gyromagnetische Verhältnis bezeichnen. Wählen Sie das Koordinatensystem so, dass \vec{B} in z -Richtung liegt und definieren Sie $\alpha = \frac{\hbar^2}{2\Theta}$ und $\beta = g\hbar|\vec{B}|$.

Es werde nun ein kleines zusätzliches Magnetfeld $\vec{B}' \propto \vec{e}_x$ eingeschaltet, so dass jetzt $H = H_0 + V$ mit $V = \gamma L_x$ und $\gamma \ll \beta$. Betrachten Sie den Rotator in einem ungestörten Zustand $|\ell m\rangle$.

- (a) Berechnen Sie die Energie bis $O(\gamma^2)$ in Störungstheorie. Nutzen Sie dabei

$$L_x = \frac{1}{2}(L_+ + L_-) \quad \text{und} \quad L_\pm |\ell, m\rangle = \sqrt{(\ell \pm m + 1)(\ell \mp m)} |\ell, m \pm 1\rangle.$$

- (b) Berechnen Sie die Energie exakt. Vergleichen Sie mit (a), indem Sie das Ergebnis der exakten Rechnung bis zur zweiten Ordnung in γ entwickeln.

Bitte wenden

[H36] Zeeman-Effekt und Paschen-Back-Effekt

(3 Punkte)

Der Hamilton-Operator $H = H_0 + H_{\text{rel}} + H_{\text{int}}$ eines Wasserstoffatoms im Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_z$ setzt sich zusammen aus dem Coulomb-Term H_0 , dem relativistischen Korrekturterm $H_{\text{rel}} = H_1 + H_2 + H_3$ mit

$$H_1 = -\frac{1}{8} \frac{(\vec{P}^2)^2}{m^3 c^2}, \quad H_2 = \frac{1}{2m^2 c^2} \hat{S} \cdot \hat{L} \frac{e^2}{R^3}, \quad H_3 = \frac{\pi \hbar^2 e^2}{2m^2 c^2} \delta^3(\vec{R})$$

und dem Magnetfeld-Wechselwirkungsterm

$$H_{\text{int}} = \mu_B \vec{B} \cdot (\hat{L} + g\hat{S}) = \mu_B B (\hat{L}_3 + g\hat{S}_3),$$

wobei $\mu_B = -\frac{e\hbar}{2mc}$ und $g = 2$.

- (a) Betrachten Sie ein schwaches Magnetfeld ($B \lesssim 10^5$ G), so dass H_{int} als kleine Störung von $H_0 + H_{\text{rel}}$ betrachtet werden kann. Begründen Sie, warum in diesem Fall die Basis $\{|n\ell s j m\rangle \equiv |j m\rangle\}$ mit $s = \frac{1}{2}$ und daher $j = \ell \pm \frac{1}{2}$ geeignet ist für die Störungsrechnung. Die Eigenwerte von $H_0 + H_{\text{rel}}$ lauten

$$E_{nj}^{0+\text{rel}} = \left[-\frac{1}{n^2} + \frac{\alpha^2}{n^4} \left(\frac{3}{4} - \frac{n}{j + \frac{1}{2}} \right) + O(\alpha^4) \right] \text{Ry}$$

Diskutieren Sie die Aufhebung der Wasserstoff-Entartung (*Feinstruktur*).

Berechnen Sie in erster Ordnung Störungstheorie die durch H_{int} verursachte Energiekorrektur $\Delta E_{n\ell j m}^{\text{int}}$ für $j = \ell \pm \frac{1}{2}$ (*Zeeman-Effekt*). Skizzieren Sie die Abhängigkeit von B .

Hinweis: $\langle j m | \hat{S}_3 | j m \rangle = \pm \frac{m}{2\ell + 1}$.

- (b) Betrachten Sie nun alternativ ein starkes Magnetfeld, so dass umgekehrt H_{rel} als kleine Störung von $H_0 + H_{\text{int}}$ betrachtet werden kann. Welche Basis ist jetzt am besten geeignet? Geben Sie die Eigenwerte von $H_0 + H_{\text{int}}$ an und diskutieren Sie deren Entartung.

Um in erster Ordnung Störungstheorie die relativistische Korrektur zu den Energieniveaus zu bestimmen (*Paschen-Back-Effekt*), wären nun in der gewählten Basis die diagonalen Matrix-Elemente von H_{rel} zu berechnen. Werden durch diese Korrektur alle Entartungen zu einem festen ℓ aufgehoben?