

Theoretische Physik II - Quantentheorie I

Präsenzübung, Blatt 1

SS 04 13/14.04.2004

[P1] Hermitesche Konjugation

M sei eine 2×2 Matrix, $|\phi\rangle$, $|\psi\rangle$ beliebige Zustandsvektoren und λ eine komplexe Zahl. Man zeige:

- (a) $\langle \phi | M | \psi \rangle^* = \langle \psi | M^\dagger | \phi \rangle$,
- (b) $M | \psi \rangle = \lambda | \psi \rangle \Rightarrow \langle \psi | M^\dagger = \lambda^* \langle \psi |$.

[P2] Eigenwerte und Eigenvektoren einer hermiteschen Matrix

Gegeben sei die hermitesche Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} + i \\ \sqrt{2} - i & 4 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie die Eigenwerte a_i der Matrix A .
- (b) Bestimmen Sie die Eigenvektoren $|\Psi_i\rangle$ und normieren Sie diese ($\langle \Psi_i | \Psi_i \rangle = 1$).

[P3] Entwicklung nach einer Basis

Entwickeln Sie

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ i \end{pmatrix}$$

nach den orthogonalen (?) Basisvektoren

$$|\Psi_1\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} + i \\ -1 \end{pmatrix}, \quad |\Psi_2\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} - i \end{pmatrix}.$$

Gesucht ist also $|\Psi\rangle = c_1 |\Psi_1\rangle + c_2 |\Psi_2\rangle$. Ist $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$ erfüllt?

[P4] Spur und Determinante

A und B sind beliebige 2×2 Matrizen. Zeigen Sie:

- (a) $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
- (b) $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \lambda \text{tr} A + \det A$, $\lambda \in \mathbb{C}$.