Theoretische Physik II - Quantentheorie I

Probeklausur **SS 05 Besprechung am 14./15.06.2005**

[PK1] Kurzfragen (5 Punkte)

(a) Vereinfachen Sie $\big(|\alpha\rangle\langle\beta|\gamma\rangle\langle\delta|\big)^\dagger$.

(b) Wann verschwindet für hermitesche Operatoren A und B das Produkt $\Delta A\ \Delta B$?

(c) $\langle x|P|\psi\rangle\ = ?$

(d) Ist $\rho\ =\ \frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{smallmatrix}\right)$ ein reiner Zustand?

(e) Wie groß ist ΔA in einem A-Eigenzustand?

[PK2] Tunneleffekt (4 Punkte)

Eine Kiste mit einem Teilchen ist durch eine dünne Trennwand in eine linke und eine rechte Hälfte geteilt. Im Zustand $|R\rangle$ ($|L\rangle$) befindet sich das Teilchen mit Sicherheit auf der rechten (linken) Seite. Der allgemeinste Zustand erlaubt eine Entwicklung

$$|\psi\rangle\ =\ |R\rangle\langle R|\psi\rangle + |L\rangle\langle L|\psi\rangle\,.$$

Das Teilchen kann durch die Trennwand tunneln, was durch den Hamilton-Operator

$$H\ =\ \Delta\left(|L\rangle\langle R| + |R\rangle\langle L|\right)\qquad\text{mit}\quad \Delta\in\mathbb{R}$$

beschrieben wird.

(a) Finden Sie die normierten Energie-Eigenkets und die zugehörigen Eigenwerte.

(b) Konstruieren Sie den Zeitentwicklungsoperator $U(t)$.

(c) Zum Zeitpunkt $t{=}0$ sei das Teilchen mit Sicherheit rechts. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, es später links zu finden?

(d) Ein Druckfehler führt zu $H\ =\ \Delta\,|L\rangle\langle R|$. Zeigen Sie, daß die zugehörige Zeitentwicklung die Gesamtwahrscheinlichkeit nicht erhält.

[PK3] Kommutator im Heisenberg-Bild (4 Punkte)

$X(t)$ sei der Ortsoperator eines freien Teilchens in einer Dimension ($H = P^2/2m$) im Heisenberg-Bild. Berechnen Sie $[X(t), X(0)]$.

Hinweis: Schreiben Sie die Zeitabhängigkeit explizit mit $U(t) = \exp(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}Ht)$.

[PK4] Gebundener Zustand in der Delta-Mulde (5 Punkte)

Die stationäre Schrödingergleichung für einen gebundenen Zustand $\phi_0(x) = \langle x|0\rangle$ eines Teilchens (Energie $E = -\frac{\hbar^2}{2m}\kappa^2$, Masse m) in einer δ-Mulde

$$V(x)\ =\ -\frac{\hbar^2}{2m}\lambda\,\delta(x)\qquad\text{mit}\quad\lambda>0$$

lautet:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - \lambda\,\delta(x) + \kappa^2\right)\langle x|0\rangle\ =\ 0\,.$$

Lösen Sie diese Gleichung in der Impulsdarstellung und kehren Sie anschließend wieder in die Ortsdarstellung zurück.