Übungen zur Vorlesung

Theorie der schwarzen Löcher

von DOMENICO GIULINI

Blatt 1

Aufgabe 1

Der englische Geologe und Physiker John Michell (1724-1793) schrieb 1783 folgende Zeilen an Henry Cavendish

> *„If the semi-diameter of a sphere of the same density as the Sun were to exceed that of the Sun in the proportion of 500 to 1, a body falling from an infinite height towards it would have acquired at its surface a greater velocity than that of light, and consequently supposing light to be attracted by the same force in proportion to its vis inertiae, with other bodies, all light emitted from such a body would be made to return towards it by its own proper gravity.“*

Überprüfen Sie die Zahlenangaben anhand moderner Werte für die Masse und den Radius der Sonne.

Aufgabe 2

Berechnen Sie innerhalb der Newton'schen Theorie die Zunahme der gravitativen Bindungsenergie eines Neutronensterns vom Radius $12\,\mathrm{Km}$ und durchschnittlicher Dichte $\rho = 5 \times 10^{17}\mathrm{Kg/m^3}$, wenn dieser ohne Massenverlust seinen Radius um einen Zentimeter verringert. Nehmen Sie dazu vereinfachend an, dass vor und nach diesem Prozess die Dichte homogen verteilt sei.

Aufgabe 3

Sei ϕ das Newton'sche Gravitationspotential (d.h. es erfüllt die Newton'schen Feldgleichungen) und

$$t_{ab} = \frac{1}{4\pi G}\Big(\nabla_a\phi\nabla_b\phi - \tfrac{1}{2}\,\delta_{ab}\,\vec{\nabla}\phi\cdot\vec{\nabla}\phi\Big) \tag{1}$$

der so genannte Spannungstensor des Gravitationsfeld. Zeigen Sie

$$\nabla^a t_{ab} = \rho\,\nabla_b\phi\,. \tag{2}$$

Zeigen Sie weiter, dass die Leistung, die Sie aufwenden müssen, um die Massen entlang des Flusses des Vektorfeldes ξ umzuverteilen, gegeben ist durch

$$\dot{A} = -\int_{\mathbb{R}^3} \nabla^a\xi^b\, t_{ab}\, d^3x\,. \tag{3}$$

Dabei sei vorausgestzt, dass ξ außerhalb eines beschränkten Gebiets verschwindet (also kompakten Träger hat). Welche Vektorfelder erfüllen $\nabla^a\xi^b + \nabla^b\xi^a = 0$ und warum führen diese zu $\dot{A} = 0$?

Aufgabe 4

In der Vorlesung wurde folgende Modifikation der Newton'schen Feldgleichung für das Gravitationspotential diskutiert,

$$\Delta\phi = \frac{4\pi G}{c^2}\left[\rho\phi + \frac{c^2}{8\pi G}\frac{\|\vec{\nabla}\phi\|^2}{\phi}\right] . \tag{4}$$

Hierbei gibt ρ die Materiedichte an, die nur in einem beschränktem Gebiet von Null verschieden sein soll (kompakter Träger), und ϕ soll im räumlich Unendlichen den Wert c^2 annehmen.

Zeigen Sie die Selbstkonsistenz von (4) im folgenden Sinne: Jede am System durch Umverteilung der Materie geleistete Arbeit δA erhöht die Gravitationsmasse M um $\delta M = \delta A/c^2$. Dabei ist M definiert durch

$$M := \lim_{R\to\infty}\left\{\frac{1}{4\pi G}\int_{S^2(R)} \vec{n}\cdot\vec{\nabla}\phi \, do\right\} . \tag{5}$$

Tipp: Nutzen Sie die in der Vorlesung allgemein bewiesene Gleichung

$$\delta A = \int_{\mathbb{R}^3} \phi \, \delta\rho \, d^3x \tag{6}$$

und rechnen Sie mit $\psi := c\sqrt{\phi}$ statt ϕ. Wie in der Vorlesung gezeigt, lässt sich durch diese Feldredefinition (4) linearisieren.