Übungen zur Vorlesung

Theorie der schwarzen Löcher

von Domenico Giulini

Blatt 3

Aufgabe 1

Zeigen Sie unter Annahme der Zustandsgleichung

$$p = \tfrac{1}{3}\rho c^2 \tag{1}$$

dass die *Tolman-Oppenheimer-Volkoff* - Gleichung eine exakte Lösung der Form

$$\rho(r) = \frac{K}{r^2} \tag{2}$$

zulässt. Für welche K ist das zutreffend? Wie groß ist das Integral von ρ über den „Raum“ $t =$ konst. zwischen $r = 0$ und $r = R$? Welche Art von Materie würde (1) genügen?

Aufgabe 2

Betrachten Sie in der tx - Ebene des Minkowskiraums die folgende Kurve:

$$\begin{aligned} t(\tau) &= \frac{c}{a} \cdot \sinh(a\tau/c)\,, \\ x(\tau) &= \frac{c^2}{a} \cdot \cosh(a\tau/c)\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Hier bezeichnet c die Lichtgeschwindigkeit, a eine Konstante von der Dimension einer Beschleunigung und τ den Kurvenparameter. (Können Sie geometrische Charakterisierungen von a und τ angeben?) Wir nennen die Bildmenge der Kurve (3) einfach den „Beobachter“.

Charakterisieren Sie durch Angabe der Wertebereiche der Koordinaten alle Punkte der tx - Ebene, die vom Beobachter kausal beeinflusst werden können. Charakterisieren Sie ebenso alle Punkte, die ihrerseits den Beobachter kausal beeinflussen können. Was entspricht dem Schnitt der Komplemente beider Mengen? Wie verändern sich die Mengen, wenn die Bahnkurve (3) für sehr große bzw. kleine τ - Werte in eine unbeschleunigte Kurve übergeht?

Aufgabe 3

Wir betrachten eine allgemeine statische Raumzeit, deren Metrik lokal immer auf die folgende Form gebracht werden kann:

$$g = \Phi^2(\vec{x})\, c^2\, dt \otimes dt - h_{ab}(\vec{x})\, dx^a \otimes dx^b\,, \tag{4}$$

wobei die Funktionen Φ und h_{ab} nicht von t abhängen. Die Weltlinien statischer Beobachter sind die Integralkurven des Vektorfeldes $u = \phi^{-1}\partial_t$. Zeigen Sie, dass die Beschleunigung $a := \nabla_u u$ gegeben ist durch

$$a = c^2\, h^{ab}\partial_b \ln(\Phi)\partial_a\,. \tag{5}$$

Für die äußere Schwarzschildgeometrie ist $\Phi = 1 - (2m/r)$. Wie verhält sich die Beschleunigung für $r \searrow 2m$?

Aufgabe 4 (Für Differentialgeometrie-Erfahrene)

Wir betrachten wieder statische Raumzeiten deren Metrik in lokalen Koordinaten die Form (4) hat. Führen Sie eine orthonormale Basis $\{\theta^0, \theta^1, \theta^2, \theta^3\}$ von Kovektorfeldern ein, so dass

$$\theta^0 = \Phi\, c dt \quad \text{und} \quad h_{ab}\, dx^a \otimes dx^b = \sum_{a=1}^{3} \theta^a \otimes \theta^a\,. \tag{6}$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Cartanschen Strukturgleichungen, dass der Ricci-Tensor der Metrik g gegeben ist durch

$$R_{00} = \frac{\Delta^{(h)}\Phi}{\Phi}\,, \quad R_{0a} = 0\,, \quad R_{ab} = R^{(h)}_{ab} - \frac{\nabla^{(h)}_a \nabla^{(h)}_b \Phi}{\Phi}\,. \tag{7}$$

Dabei beziehen sich alle Komponenten auf die orthonormale Kobasis der θ^a, $\nabla^{(h)}_a$ sind die kovarianten Ableitungen in den 3-dimensionalen Flächen $t =$ konst. mit Metrik h, $R^{(h)}_{ab}$ ist ihr Ricci-Tensor und $\Delta^{(h)} := h^{ab}\nabla^{(h)}_a \nabla^{(h)}_b$ ihr Laplace Operator.

Untersuchen Sie mit Hilfe von (7) die überall regulären, statischen Lösungen der Vakuum (d.h. $T_{ab} = 0$) Einsteingleichungen. Zeigen Sie damit den Satz von Einstein-Pauli (1943), dass, falls die Hyperflächen $t =$ konst. diffeomorph zu $\mathbb{R}^3$ sind, die einzige solche Lösung, die räumlich-asymptotisch flach ist, durch den Minkowskiraum gegeben ist. Was bedeutet das physikalisch?