

Übungen zur Vorlesung
Theorie der schwarzen Löcher

von DOMENICO GIULINI

Blatt 4

Aufgabe 1

Eine 5 Zentimeter lange Stecknadel falle in Längsrichtung radial und frei im Gravitationsfeld eines Neutronensterns mit Masse $M = 1,5 M_{\odot}$ und Radius $R = 13$ km. Der Neutronenstern sei nicht rotierend, so dass sein äußeres Gravitationsfeld durch die äußere Schwarzschildlösung gegeben ist. Schätzen Sie mit Hilfe der in der Vorlesung diskutierten Methode ab, ob die Stecknadel in Längsrichtung zerissen wird, und wenn ja in wie viele Stücke, bevor sie auf die Oberfläche des Neutronensterns trifft. (Hinweis: Die Zerreißspannung und Dichte von Stahl sind $\sigma = 7 \times 10^8 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ und $\rho = 7,8 \times \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$.) In wie viele Stücke würde eine Eisenbahnschiene von 20 Meter Länge zerissen werden?

Aufgabe 2

Bezüglich der orthonormierten Kobasis

$$\begin{aligned}\Theta^0 &= \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) c dt, \\ \Theta^1 &= \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} dr, \\ \Theta^2 &= r d\theta, \\ \Theta^3 &= r \sin(\theta) d\varphi,\end{aligned}\tag{1}$$

sind die nicht-verschwindenden Komponenten des Krümmungstensors der äußeren Schwarzschildgeometrie gegeben durch

$$\begin{aligned}\frac{r_S}{r^2} &= R_{0101} \\ &= -R_{2323} \\ &= 2 R_{1212} = 2 R_{1313} \\ &= -2 R_{0202} = -2 R_{0303}.\end{aligned}\tag{2}$$

Ersetzen Sie Θ^0 und Θ^1 durch $\Theta^{\pm} := \frac{1}{2}(\Theta^0 \pm \Theta^1)$ und drücken Sie die Krümmungskomponenten in der neuen Basis aus. Argumentieren Sie ohne viel zu rechnen, dass der Krümmungstensor invariant unter radialen Lorentz-Boosts ist.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass man jede sphärisch-symmetrische räumliche Metrik

$$g_R = f^2(r) dr^2 + g^2(r)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (3)$$

durch Verwendung einer neuen Radialkoordinate $r_* = h(r)$ in manifest räumlich konform-flacher Gestalt schreiben kann:

$$g_R = F^2(r_*) \left[dr_*^2 + r_*^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right]. \quad (4)$$

Führen Sie dies für die äußere Schwarzschildmetrik explizit durch und zeigen Sie damit, dass diese in der Form

$$g = \left[\frac{1 - \frac{r_S}{4r}}{1 + \frac{r_S}{4r}} \right]^2 c^2 dt^2 - \left[1 + \frac{r_S}{4r} \right]^4 (dr_*^2 + r_*^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)) \quad (5)$$

geschrieben werden kann. Diskutieren Sie die Abbildung $r_* \rightarrow r$ für $r_* \in (0, \infty)$.

Zeigen Sie, dass die Abbildungen (Inversion an der Sphäre $r_* = r_S/4$)

$$\begin{aligned} (t, r_*, \theta, \varphi) &\mapsto \left(t, \frac{(r_S/4)^2}{r}, \theta, \varphi \right) \\ (t, r_*, \theta, \varphi) &\mapsto \left(t, \frac{(r_S/4)^2}{r}, \pi - \theta, \varphi + \pi \right) \end{aligned} \quad (6)$$

Isometrien der Schwarzschildmetrik sind. Machen Sie sich die Geometrie der Hyperfläche $t = \text{konst.}$ qualitativ anhand eines Einbettungsdiagramms klar, wobei Sie die erste Isometrie ausnutzen können. Welche geometrischen Aussagen können Sie über die 2-Sphäre $r_* = r_S/4$ treffen?