Übungen zur Vorlesung

Theorie der schwarzen Löcher

von DOMENICO GIULINI

Blatt 5

Aufgabe 1

In der äußeren Schwarzschildgeometrie ruhe ein Beobachter relativ zu den Schwarzschildkoordinaten bei $r = R > r_S$. Diejenigen Nullgeodätischen seines Rückwärtslichtkegels, die bei Rückverfolgung ein Gebiet beschränkter r-Werte nicht verlassen, nennt man den „Schatten“ des Zentralobjektes. Begründen Sie diese Terminologie. Zeigen Sie, dass der Schatten im vorliegenden Fall ein Kreiskegel mit Öffnungswinkel α (Winkel zwischen Symmetrieachse und Kegelmantel) füllt, wobei

$$\sin\alpha = \sqrt{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{r_S}{R} \cdot \sqrt{1 - \frac{r_S}{R}}\,. \tag{1}$$

Anleitung: Benutzen Sie die in der Vorlesung besprochene Methode des effektiven Potentials für die Radialbewegung und machen Sie Sich klar, dass die Schatten-Geodätischen genau diejenigen sind, die bei Rückverfolgung über das Potentialmaximum bei $r = 3r_S/2$ kommen.

Aufgabe 2

Betrachten Sie die obere Halbebene

$$H_+ := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\} \tag{2}$$

mit der Metrik

$$g = \frac{1}{y^2}\big(dx \otimes dx + dy \otimes dy\big)\,. \tag{3}$$

Bestimmen Sie alle Geodätischen und zeigen Sie, dass H_+ bezüglich g geodätisch vollständig ist.

Sei $SL(2, \mathbb{R})$ die Gruppe der reellen 2×2 Matrizen mit Determinante 1 und $PSL(2, \mathbb{R}) := SL(2, \mathbb{R})/\{\pm 1_2\}$.

Zeigen Sie: Mit $z := x + iy$ ist durch

$$PSL(2, \mathbb{R}) \times H_+ \to H_+\,, \quad \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z\right) \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \tag{4}$$

eine isometrische Aktion von $PSL(2, \mathbb{R})$ auf (H_+, g) gegeben. Was ist die Krümmung von (H_+, g) und was könnte all dies mit der Lorentzgruppe in $1 + 2$ Dimensionen zu tun haben?

Aufgabe 3

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass für eine statische sphärisch-symmetrische Metrik

$$
\begin{aligned}
g = \exp\bigl(2a(r)\bigr)\, c^2\, dt \otimes dt - \exp\bigl(2b(r)\bigr)\, dr \otimes dr \\
- r^2\bigl(d\theta \otimes d\theta + \sin^2\theta\, d\varphi \otimes d\varphi\bigr)
\end{aligned}
\tag{5}
$$

die Einsteingleichungen mit dem Energie-Impuls-Tensor einer entlang $u = \exp(-a)\partial/\partial t$ strömenden idealen Flüssigkeit äquivalent sind den drei gewöhnlichen Differentialgleichungen (ein Strich bezeichnet die Ableitung nach r):

$$p' = -a'(c^2\rho + p) \tag{6a}$$

$$M' = 4\pi r^2 \rho \tag{6b}$$

$$a' = \exp(2b)\frac{G}{c^2}\bigl[4\pi r p/c^2 + M/r^2\bigr]\,. \tag{6c}$$

Dabei ist die zweite freie Funktion b in der Metrik durch die Massenfunktion M bestimmt:

$$\exp(-2b) = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}\,. \tag{7}$$

Zusammen bilden die drei Gleichungen (6) ein unterbestimmtes Differentialgleichungssystem für die vier Funktionen a, b (oder M), ρ und p.

Zeigen Sie durch Elimination von p und ρ aus diesem System, dass a und M der Gleichung genügen

$$\left(\exp(-b)\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\left(\exp(-b)\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\exp(a) = \exp(a)\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{2GM}{c^2 r^3}\right)\,. \tag{8}$$

Anleitung: Löse (6c) nach p auf und differenziere nach r. Ersetze darin p' durch (6a), p durch die zuerst erhaltene Gleichung und ρ durch (6b).