Übungen zur Vorlesung

Theorie der schwarzen Löcher

von DOMENICO GIULINI

Blatt 6

Aufgabe 1

Eine Anzahl $n = 2$ von ungeladenen drehimpulslosen schwarzen Löchern gleicher Masse kollabiere radial aus dem Zustand relativer Ruhe und verschmelze zu einem einigen schwarzen Loch. Leiten Sie mit Hilfe des Hawking'schen Oberflächensatzes eine obere Schranke für die dabei abgestrahlte Energie ab. Verallgemeinern Sie dies auf $n > 2$.

Aufgabe 2

Einem ungeladenen schwarzen Loch der Kerr-Familie werde Rotationsenergie entzogen. Leiten Sie mit Hilfe des Hawking'schen Oberflächensatzes wieder eine obere Schranke für die dabei entnehmbare Energie ab. Wie viel Prozent der Anfangsenergie beträgt diese im optimalen Fall $|a| = m$?

Aufgabe 3

Zwei ungeladene schwarze Löcher der Kerr-Familie mit Parametern (m_1, a_1) und (m_2, a_2) verschmelzen zu einem schwarzen Loch mit Parametern (m, a). Zeigen Sie, dass ein minimales m (und damit die größte Energieabstrahlung) für $a = 0$ erreicht wird. Zeigen Sie dann weiter, dass für gegebenes m mit $a = 0$ die Summe $m_1 + m_2$ dann am kleinsten ist, falls $|a_i| = m_i$ für $i = 1, 2$. Welcher Bruchteil der Gesamtenergie kann also in diesem optimalen Fall höchstens abgestrahlt werden? Vergleichen Sie dies mit dem Ergebnis aus Aufgabe 1.

Aufgabe 4

Das Duale $\star A$ einer 2-Form A (antisymmetrischer Tensor 2. Stufe) ist (in 4 Dimensionen) definiert durch

$$\star A_{ab} := \tfrac{1}{2}\epsilon_{abcd}A^{cd}\,. \tag{1}$$

Hierbei ist ϵ die zur Metrik g gehörige Volumenform (Levi-Civita Tensor). Diese Definition ist von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig.

Zeigen Sie, dass $\star \circ \star = -\mathrm{Id}$ (minus die Identität).

Zeigen Sie weiter: Sind A und B 2-Formen, so gilt

$$\star\,[A,B] = [\star A, B] = [A, \star B]\,, \tag{2a}$$
$$A\cdot B - (\star B)\cdot(\star A) = \tfrac{1}{2} g\,\mathrm{Sp}(A\cdot B)\,. \tag{2b}$$

Hier und im Folgenden benutzen wir folgende abkürzende Schreibweisen: $A\cdot B$ für den Tensor mit Komponenten $(A\cdot B)_{ab} = A_{an}B^{n}{}_{b}$, A^2 für $A\cdot A$, entsprechend A^4 für $A\cdot A\cdot A\cdot A$, $[A,B]$ für den Kommutator $A\cdot B - B\cdot A$ und $\mathrm{Sp}(X)$ für die Spur $g^{ab}X_{ab}$ eines Tensors X.

Beweisen Sie mit Hilfe von (2), dass

$$A\cdot\star A \;=\; \star A\cdot A = \tfrac{1}{4} g\,\mathrm{Sp}(A\cdot\star A)\,, \tag{3a}$$
$$(\star A)^2 \;=\; A^2 - \tfrac{1}{2} g\,\mathrm{Sp}(A^2)\,, \tag{3b}$$

und daraus weiter:

$$A^4 \;=\; g\,I_2^2 + 2A^2\,I_1\,, \tag{4a}$$
$$(\star A)^4 \;=\; g(I_2^2 + 4I_1^2) - 2A^2\,I_1\,. \tag{4b}$$

Dabei bezeichnen I_1 und I_2 die beiden Invarianten

$$I_1 := \tfrac{1}{4}\,\mathrm{Sp}(A^2)\,, \tag{5a}$$
$$I_2 := \tfrac{1}{4}\,\mathrm{Sp}(A\cdot\star A)\,. \tag{5b}$$

Zeigen Sie, dass $I_{1,2}$ die einzigen unabhängigen polynomialen Invarianten der 2-Form A sind . Zeigen Sie weiter, dass der spurfreie Anteil von A^2, $T := A^2 - \frac{1}{4} g\,\mathrm{Sp}(A^2)$, auch geschrieben werden kann als

$$T = \tfrac{1}{2}(A^2 + \star A^2) = \tfrac{1}{2}(A + i\star A)(A - i\star A) \tag{6}$$

und dass sein Quadrat die einfache Form hat

$$T^2 = g(I_1^2 + I_2^2)\,. \tag{7}$$

(6)

Zeigen Sie schließlich, dass T invariant unter Transformationen der folgenden Form (sog. Dualitätstransformationen) ist:

$$\big(F + i\star F\big) \mapsto \exp(i\alpha)\big(F + i\star F\big)\,. \tag{8}$$

Was hat das alles mit Elektrodynamik zu tun? Was bedeutet die Invarianz unter Dualitätstransformationen für die Einstein-Maxwell-Gleichungen?