Übungen zur Vorlesung

Differentialgeometrische Methoden der Physik 1

von DOMENICO GIULINI

Blatt 1

Aufgabe 1

Sei $\vec{z}(s)$ die Darstellung einer Kurve, wobei s die Eigenlänge (gemessen von einem willkürlichen gewählten Anfangspunkt) bezeichnet. Wir suchen die Mittelpunkte $\vec{m}$ aller Kugeln, an denen die Kurve bei $s = s_0$ einen Berührungspunkt dritter Ordnung hat (auch *Schmiegkugeln* genannt). Das bedeutet, dass die Funktion $f(s) = (\vec{z}(s) - \vec{m})^2$ bei $s = s_0$ gerade den Wert R^2 annimmt, wobei R der (noch unbekannte) Radius einer solchen Kugel ist, und dass die ersten drei Ableitungen von f bei $s = s_0$ verschwinden. (Ableitungen nach s werden wie in der Vorlesung durch einen Punkt gekennzeichnet.)

Wählen Sie die Darstellung

$$\vec{m} = \vec{z}(s_0) + m_1\vec{e}_1 + m_2\vec{e}_2 + m_3\vec{e}_3\,, \tag{1}$$

wobei $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ das in der Vorlesung eingeführte begleitende Dreibein ist, und zeigen Sie, dass sich folgende Bedingungen für die Koeffizienten m_a ergeben:

$\dot{f}(s_0) = 0$ ist äquivalent zu

$$m_1 = 0\,. \tag{2a}$$

$\ddot{f}(s_0) = 0$ ist äquivalent zu

$$m_2\kappa(s_0) = 1\,. \tag{2b}$$

$\dddot{f}(s_0) = 0$ ist äquivalent zu

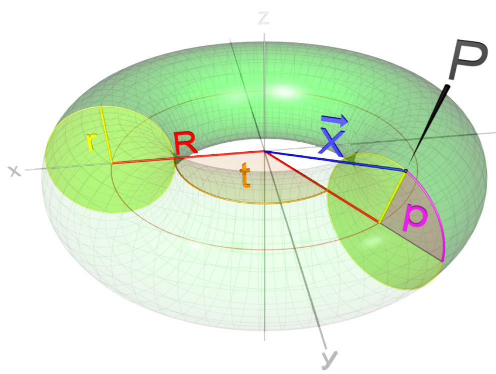
$$-\kappa^2(s_0)m_1 + m_2\dot{\kappa}(s_0) + m_3\kappa(s_0)\tau(s_0) = 0\,. \tag{2c}$$

(Tipp: Erinnern Sie Sich an die zweite Formel für das begleitende Dreibein: $\dot{\vec{e}}_2 = -\kappa\vec{e}_1 + \tau\vec{e}_3$.)

Um (2b) zu erfüllen muss offensichtlich $\kappa(s_0) \neq 0$ gelten. Nehmen Sie $\tau(s_0) \neq 0$ an und berechnen Sie den Radius der Schmiegkugel. Was passiert im Fall $\tau(s_0) = 0$? (Tipp: Eine ebene Kurve hat an jedem Punkt mit $\kappa \neq 0$ einen eindeutigen Schmiegkreis, der mit der Kurve einen Berührungspunkt *zweiter* Ordnung hat.)

Aufgabe 2

Das Bild zeigt eine Torusfläche, dessen Mittelkreis wir uns als Kreis vom Radius R in der xy-Ebene um den Ursprung denken. Die Torusfläche besteht dann in einem Schlauch vom Radius $r < R$ um den Mittelkreis. Sie wird durch zwei Winkelkoordinaten $x^1 = t$ (Längengrad) und $x^2 = p$ (Breitengrad) parametrisiert, so dass (wir



schreiben, der Vorlesung folgend, $\vec{z}$ statt $\vec{x}$):

$$\vec{z}(t,p) = R\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\\ 0\end{pmatrix} + r\cos p\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\\ 0\end{pmatrix} + r\sin p\,\vec{e}_z = \begin{pmatrix}(R + r\cos p)\cos t\\ (R + r\cos p)\sin t\\ r\sin p\end{pmatrix} \tag{3}$$

Berechnen Sie die Matrix der ersten Fundamentalform (Metrik) gemäß:

$$g_{ab} = \vec{z}_a \cdot \vec{z}_b\,. \tag{4}$$

Wie groß ist der Flächeninhalt der Torusfläche?

Zeigen Sie, dass die Flächennormale gegeben ist durch

$$\vec{n} = \begin{pmatrix}\cos p\ \cos t\\ \cos p\ \sin t\\ \sin p\end{pmatrix}\ . \tag{5}$$

Berechnen Sie daraus die Matrix L_a^b der Weingarten-Abbildung, indem Sie folgende Gleichung aus der Vorlesung benutzen (wie immer ist $\vec{n}_a := \partial\vec{n}/\partial x^a$):

$$\vec{n}_a := L_a^b\,\vec{z}_b\,. \tag{6}$$

Da diese bereits in Diagonalform ist, können Sie die Eigenwerte der Weingarten-Abbildung einfach ablesen. Zeigen Sie damit, dass die Gauß'sche Krümmung der Torusfläche gegeben ist durch

$$K(t,p) = \frac{\cos p}{R + r\cos p}\cdot\frac{1}{r}\,. \tag{7}$$

Was ergibt die Integration der Gauß'schen Krümmung über die gesamte Torusfläche?