Übungen zur Vorlesung

Differentialgeometrische Methoden der Physik 1

von DOMENICO GIULINI

Blatt 3

Aufgabe 1

In dieser Übung beschäftigen wir uns nochmals mit dem Zusammenhang zwischen den beiden Gruppen der speziellen orthogonalen Transformationen (Drehungen) im $\mathbb{R}^3$ und den speziellen unitären Transformationen im $\mathbb{C}^2$. Diese sind definiert durch

$$\mathrm{SO}(3) := \Big\{ R \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(3\times 3) \,:\, \det(R) = 1, \quad R^\top R = 1_3 \Big\}, \tag{1}$$

$$\mathrm{SU}(2) := \Big\{ A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(2\times 2) \,:\, \det(A) = 1, \quad A^\dagger A = 1_2 \Big\}, \tag{2}$$

wobei $\dagger$ die Kombination von Transposition und komplexer Konjugation bezeichnet.

Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{SU}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \,:\, a, b \in \mathbb{C}\,, |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\} \tag{3}$$

wobei $\bar{z}$ das komplex Konjugierte zu z bezeichnet. Zeigen Sie damit, indem Sie $z_1 = x + iy$ und $z_2 = u + iv$ mit reelen x, y, u, v schreiben, dass $\mathrm{SU}(2)$ als dreidimensionale Einheitssphäre im $\mathbb{R}^4$ aufgefasst werden kann.

Neben $\mathbb{R}^3$ betrachten wir den dreidimensionalen *reellen* Vektorraum aller Hermiteschen spurlosen 2×2 Matrizen:

$$H^2_s := \Big\{ m \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(2\times 2) \,:\, \mathrm{Spur}(m) = 0, \quad m^\dagger = m \Big\} \tag{4}$$

Eine Basis dieses Vektorraums ist z.B. durch die Pauli-Matrizen gegeben:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

die folgende nützliche Relation erfüllen (zeigen Sie das):

$$\sigma_a \sigma_b = 1_2 \delta_{ab} + i \varepsilon_{abc} \sigma_c\,. \tag{6}$$

(Diese Relation besagt gerade, dass $\{1_2, -i\sigma_1, -i\sigma_2, -i\sigma_3\}$ eine Darstellung der üblichen Basis der Quaternionen bilden.)

Ein Isomorphismus zwischen $\mathbb{R}^3$ und H^2_s ist dann gegeben durch (Summenkonvention in Allem was folgt)

$$\phi : \mathbb{R}^3 \to H^2_s\,, \quad \vec{x} \mapsto \phi(\vec{x}) := x^a \sigma_a =: \vec{x} \cdot \vec{\sigma}\,. \tag{7}$$

Zeigen Sie, das die inverse Abbildung gegeben ist durch

$$\phi^{-1}(m) = \tfrac{1}{2}\mathrm{Spur}\big(m\sigma_a\big)\,\vec{e}_a\,, \tag{8}$$

wobei $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ ist, und dass

$$\det\big(\phi(\vec{x})\big) = -\|\vec{x}\|\,. \tag{9}$$

Auf dem Raum H^2_s operiert die Gruppe $SU(2)$ durch lineare Transformationen wie folgt:

$$T : SU(2) \times H^2_s \to H^2_s\,, \quad (A, m) \mapsto T_A(m) := AmA^\dagger\,. \tag{10}$$

Zeigen Sie, dass für alle $m \in H^2_s$ und alle $A, A' \in SU(2)$ gilt:

$$m \in H^2_s \Rightarrow T_A(m) \in H^2_s\,, \tag{11}$$

$$T_{A'} \circ T_A = T_{A'A}\,, \tag{12}$$

$$\det\big(T_A(m)\big) = \det(m)\,. \tag{13}$$

Da sowohl ϕ aus (7) als auch jedes T_A lineare Abbildungen sind, ist auch jedes

$$P_A := \phi^{-1} \circ T_A \circ \phi \tag{14}$$

eine lineare Abbildung des $\mathbb{R}^3$ auf sich.

Zeigen Sie, dass für jedes $A \in SU(2)$ das Bild P_A tatsächlich Element von $SO(3)$ ist, und dass für alle $A, A' \in SU(2)$ gilt:

$$P_{A'} \circ P_A = P_{A'A}\,. \tag{15}$$

Dies besagt gerade, dass $A \mapsto P_A$ ein Gruppenhomomorphismus von $SU(2)$ nach $SO(3)$ ist.

Die Komponenten der orthogonalen Matrix P_A seien durch $P_A(\vec{e}_b) = (P_A)_{ab}\vec{e}_a$ definiert. Zeigen Sie, dass diese als Funktion von A durch folgenden analytischen Ausdruck gegeben sind:

$$(P_A)_{ab} = \tfrac{1}{2}\mathrm{Spur}\big(\sigma_a A \sigma_b A^\dagger\big)\,. \tag{16}$$

Aufgabe 2

Ein allgemeines Element $A \in SU(2)$ kann durch einen reellen Einheitsvektor $\vec{n}$ und einen Winkel $\alpha \in [0, 4\pi)$ wir folgt parametrisiert werden:

$$A = \exp\big(-(i\alpha/2)(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})\big) = \mathbb{1}_2\cos(\alpha/2) - i\,(\vec{n}\vec{\sigma})\,\sin(\alpha/2)\,. \tag{17}$$

Rechnen Sie unter Benutzung von (6) explizit nach, dass

$$A(\vec{x}\cdot\vec{\sigma})A^\dagger = (P_A\vec{x})\cdot\vec{\sigma} \tag{18a}$$

mit

$$P_A\vec{x} = \vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{x}) + \big(\vec{x} - \vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{x})\big)\,\cos\alpha + \big(\vec{n}\times\vec{x}\big)\,\sin\alpha\,. \tag{18b}$$

Machen Sie sich klar, dass dies genau eine Drehung um den Vektor $\alpha\vec{n}$ ist, d.h. um die orientierte, durch $\vec{n}$ erzeugte Achse mit den Winkel α. Wie würden Sie die lineare Abbildung P_A (ohne Verwendung von $\vec{x}$) anschreiben?

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$P : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)\,, \quad A \to P_A \tag{19}$$

Ein surjektiver aber nicht injektiver Gruppenhomomorphismus ist, wobei das Urbild von P_A durch $\{A, -A\}$ gegeben ist.

Deuten Sie gemäß (3) das Paar $\{A, -A\}$ als antipodale Punkte auf der 3-Sphäre. Das erlaubt $\mathrm{SO}(3)$ als den Quotientenraum zu betrachten, der aus der 3-Späre durch Identifikation antipodaler Punkte entsteht. Diesen nennt man den dreidimensionalen reell-projektiven Raum und bezeichnet ihn mit $\mathbb{R}P^3$.

Hinweis: Surjektivität folgt aus Aufgabe 2. Lokal können auch Umkehrungen der Abbildung (19) angeben werden. Ist z.B. $R \in \mathrm{SO}(3)$ eine Drehung die $\mathrm{Spur}(R) \neq -1$ erfüllt und R_{ab} ihre Komponenten (bezüglich der Standardbasis), dann erfüllt

$$A = \pm \frac{1_2 + R_{ab}\sigma_a\sigma_b}{2\sqrt{1 + \mathrm{Spur}(R)}} \tag{20}$$

die Gleichung $P_A = R$. Dies kann man direkt beweisen, z.B. mit Hilfe der für jede (2×2)–Matrix m gültigen Identität

$$\sigma_a m \sigma_a = 1_2\big(2 \cdot \mathrm{Spur}(m)\big) - m\,. \tag{21}$$

Diese kann ihrerseits leicht nachgewiesen werden, da es wegen ihrer Linearität in m ausreicht, ihre Gültigkeit für eine Basis des komplex-linearen Raums der (2×2)–Matrizen zu zeigen, z.B. für $\{1_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, und das ist mit (6) sehr einfach. Sodann geht man aus von

$$A\sigma_b A^\dagger = R_{ab}\sigma_a\,, \tag{22}$$

multipliziert von rechts mit σ_b und wendet (21) für $m = A^\dagger$ an. Spurbildung auf beiden Seiten erlaubt wegen $\mathrm{Spur}(A) = \mathrm{Spur}(A^\dagger)$ (wieso?) $[\mathrm{Spur}(A)]^2$ durch $\mathrm{Spur}(R)$ auszudrücken und dann nach A aufzulösen, was (20) ergibt.