Übungen zur Vorlesung

Differentialgeometrische Methoden der Physik 1

von DOMENICO GIULINI

Blatt 4

Aufgabe 1

Sei $\phi \in C^\infty(M)$; dann ist die zweifache kovariante Ableitung, $\nabla\nabla\phi$, ein Tensorfeld in $ST^0_2(M)$, das man auch *die Hesse'sche* von ϕ nennt. Diese hängt wegen der 2. Ableitung von der Wahl der kovarianten Ableitung ∇ ab. (Wegen $\nabla\phi = d\phi$ ist die erste kovariante Ableitung eindeutig und durch das gewöhnliche äußere Differential gegeben.) Zeigen Sie, dass

$$\nabla\nabla\phi(X,Y) = \nabla_X\nabla_Y\phi - \nabla_{\nabla_X Y}\phi\,, \tag{1}$$

und dass der antisymmetrische Anteil dann wie folgt geschrieben werden kann

$$\nabla\nabla\phi(X,Y) - \nabla\nabla\phi(Y,X) = -T(X,Y)\phi\,. \tag{2}$$

Dabei bezeichnet $T(X,Y)$ das Vektorfeld, das aus der Torsion $T \in ST^1_2(M)$ durch Kontraktion mit X und Y entsteht.

Seien $\{e_1,\cdots,e_n\}$ und $\{\theta_1,\cdots,\theta_n\}$ duale lokale Basisfelder der Tangential- und Kotangentialräume, dann gilt für die Hesse'sche von ϕ

$$\nabla\nabla\phi = \nabla_a\nabla_b\phi\,\theta^a\otimes\theta^b\,, \tag{3}$$

wobei $\nabla_a\nabla_b\phi := \nabla\nabla\phi(e_a,e_b)$. Zeigen Sie, dass damit (2) die Form annimmt

$$\nabla_a\nabla_b\phi - \nabla_b\nabla_a\phi = -T^c_{ab}\nabla_c\phi\,. \tag{4}$$

In diesem Sinne „vertauschen" die zweiten kovarianten Ableitungen auf Funktionen also genau dann, wenn die Torsion verschwindet. Insbesondere ist die Hesse'sche zur Levi-Civita kovarianten Ableitung stets symmetrisch.

Aufgabe 2

Betrachten Sie nun den zu Aufgabe 1 analogen Fall, nun aber für ein Vektorfeld $Z \in ST^1_0(M)$. Dann ist $\nabla\nabla Z \in ST^1_2$. Zeigen Sie, dass wieder gilt

$$\nabla\nabla Z(X,Y) = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_{\nabla_X Y}Z\,, \tag{5}$$

und dass der antysmmytrische Anteil nun gegeben ist durch

$$\nabla\nabla Z(X,Y) - \nabla\nabla Z(Y,X) = R(X,Y)Z - \nabla_{T(X,Y)}Z\,. \tag{6}$$

Schreibt man in Komponenten bezüglich der dualen Basisfelder $\{e_1, \cdots, e_n\}$ und $\{\theta_1, \cdots, \theta_n\}$ wie üblich

$$\nabla\nabla Z(X, Y) = \nabla_a \nabla_b Z^c \, \theta^a \otimes \theta^b \otimes e_c \,, \tag{7}$$

dann ist die Komponentenversion von (6) gegeben durch

$$\nabla_c \nabla_d Z^a - \nabla_d \nabla_c Z^a = R^a{}_{bcd} \, Z^b - T^b_{cd} \nabla_b Z^a \,. \tag{8}$$

Aufgabe 3

Verallgemeinern Sie Aufgabe 1 und 2 auf beliebige Tensorfelder $F \in ST^\ell_m(M)$. Zeigen Sie insbesondere, dass die Verallgemeinerung der Komponentenversionen (4) und (8) gegeben ist durch

$$\begin{aligned}(\nabla_c \nabla_d - \nabla_d \nabla_c) F^{a_1 \cdots a_l}_{b_1 \cdots b_m} = & \sum_{k=1}^{\ell} R^{a_k}{}_{scd} F^{a_1 \cdots a_{k-1} \, s \, a_{k+1} \cdots a_\ell}_{b_1 \cdots b_m} \\ & - \sum_{k=1}^{m} R^s{}_{b_k cd} F^{a_1 \cdots a_\ell}_{b_1 \cdots b_{k-1} \, s \, b_{k+1} \cdots b_m} \\ & - T^s_{cd} \nabla_s F^{a_1 \cdots a_\ell}_{b_1 \cdots b_m} \,. \end{aligned} \tag{9}$$