Übungen zur Vorlesung

Differentialgeometrische Methoden der Physik 1

von DOMENICO GIULINI

Blatt 5

Aufgabe 1

Nach Aufgabe 1 von Blatt 2 ist die Umkehrung der stereographischen Projektion $P_n : S^n - \{n\} \to E_n$ vom Punkt $n \in S^n$ gegeben durch die Abbildung

$$\xi \mapsto P_n^{-1}(\xi) = x = \frac{2\xi}{\|\xi\|^2 + 1} + n\,\frac{\|\xi\|^2 - 1}{\|\xi\|^2 + 1}\,. \tag{1}$$

Dabei ist $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x, x\rangle = 1\}$ und $E_n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x, n\rangle = 0\}$.

Durch die Einbettung der S^n in den $\mathbb{R}^{n+1}$ wird auf S^n eine Riemannsche Metrik induziert. Zeigen Sie, dass diese in den stereographischen Koordinaten ξ die konform flache Gestalt hat

$$g = \frac{4}{\left(1 + \|\xi\|^2\right)^2} \sum_{a=1}^{n} d\xi^a \otimes d\xi^a\,. \tag{2}$$

Aufgabe 2

g und $\hat{g}$ seien zwei konform äquivalente Metriken auf der Mannigfaltigkeit M. Es existiert also eine Funktion $\phi : M \to \mathbb{R}$, so dass

$$\hat{g} = e^{2\phi}\, g\,. \tag{3}$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Cartan'schen Strukturgleichungen, dass die jeweiligen kovarianten Krümmungstensoren in $ST_4^0(M)$ die folgende Beziehung haben:

$$\hat{R} = e^{2\phi}\left[R + e^{\phi}\,\mathrm{Hess}_g\!\left(e^{-\phi}\right) \owedge g - \tfrac{1}{2}\|d\phi\|_g^2\, g \owedge g\right]. \tag{4}$$

Dabei bezeichnet Hess_g die Hesse'sche (siehe Blatt 4 Aufgabe 2) der Levi-Civita kovarianten Ableitung zur Metrik g und $\owedge$ das sogenannte Kulkarni-Nomizu Produkt, das jedem Paar symmetrischer kovarianter Tensoren einen kovarianten Tensor 4. Stufe mit den Symmetrien des Krümmungstensors zuordnet:

$$\begin{aligned} h \owedge k(X_1, X_2, X_3, X_4) := {} & h(X_1, X_3)\, k(X_2, X_4) \\ & + h(X_2, X_4)\, k(X_1, X_3) \\ & - h(X_1, X_4)\, k(X_2, X_3) \\ & - h(X_2, X_3)\, k(X_1, X_4)\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Oder in Komponenten

$$(h \owedge k)_{abcd} = h_{ac}k_{bd} + h_{bd}k_{ac} - h_{ad}k_{bc} - h_{bc}k_{ad}\,. \tag{6}$$

Aufgabe 3

An einem Punkt $p \in M$ sei $E_p \subset T_p(M)$ eine zweidimensionaler Unterraum. Alle Geodätischen durch p, deren Tangentenvektor am Punkt p in E_p liegt, bilden lokal (d.h. in einer Umgebung von p) eine zweidimensonale Untermannigfaltigkeit. Deren Gauß'sche Krümmung am Punkt p nennt man die Schnittkrümmung von M in p tangential zu E_p. Ist $E_p = \text{Span}\{X_p, Y_p\}$ und bezeichnet $R \in ST^0_4(M)$ den kovarianten Krümmungstensor, dann gilt für die Schnittkrümmung

$$\begin{aligned} K_p(E_p) =& \frac{R_p(X_p, Y_p, X_p, Y_p)}{g_p(X_p, X_p)\, g_p(Y_p, Y_p) - [g_p(X_p, Y_p)]^2} \\ =& 2 \cdot \frac{R_p(X_p, Y_p, X_p, Y_p)}{g_p \owedge g_p(X_p, Y_p, X_p, Y_p)}\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Im Falle einer indefiniten Metrik ist hier vorausgesetz, dass E_p nicht entartet ist, d.h. der Nenner in (7) nicht verschwindet. (Ist g eine Lorentzmetrik, so ist dies genau dann der Fall, wenn E_p lichtartig ist.)

Zeigen Sie, dass $K_p(E_p)$ wirklich nur von E_p und nicht von weiteren Merkmalen der erzeugenden Vektoren X_p, Y_p abhängt. Zeigen Sie weiter, dass $K_p(E_p)$ genau dann von der Wahl der Ebene E_p unabhängig ist, wenn

$$R_p = \tfrac{1}{2}\, K_p\, g_p \owedge g_p\,. \tag{8}$$

Gilt dies für alle p einer offenen Menge $U \subset M$, dann existiert eine Funktion $K : U \to \mathbb{R}$, so dass in U gilt

$$R = \tfrac{1}{2}\, K\, g \owedge g\,. \tag{9}$$

Zeigen Sie, dass die Komponenten des Ricci- und Einsteintensors dann die Form haben

$$R_{ab} = (n-1)Kg_{ab}\,, \qquad G_{ab} = -\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)Kg_{ab}\,. \tag{10}$$

Leiten Sie aus der zweimal kontrahierten 2. Bianchi Identität,

$$g^{ab}\nabla_a G_{bc} = 0 \tag{11}$$

ab, dass für $n > 2$ die Funktion K konstant ist. Man sagt dann, die Metrik habe *konstante Krümmung* K.

Aufgabe 4

Berechnen Sie mit Hilfe von (4) den kovarianten Krümungstensor der Metrik (2). Zeigen Sie insbesondere, dass diese von konstanter Krümmung $K = 1$ ist.