Übungen zur Vorlesung

Differentialgeometrische Methoden der Physik 2

von DOMENICO GIULINI

Blatt 1

Aufgabe 1

Seine $M^{(1)}$ und $M^{(2)}$ differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Die differenzierberaten Strukturen seien durch die Atlanten $\{(U^{(1)}_\alpha, \phi^{(1)}_\alpha) \mid \alpha \in I^{(1)}\}$ und $\{(U^{(2)}_\alpha, \phi^{(2)}_\alpha) \mid \alpha \in I^{(2)}\}$ repräsentiert. Zeigen Sie, dass $M = M^{(1)} \times M^{(2)}$ wieder eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist indem sie einen diese Struktur repräsentierenden Atlas angeben.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass jede offene Untergruppe H einer topologischen Gruppe G zugleich abgeschlossen ist. Was bedeutet dies für den Fall, dass G zusammenhängend ist?
Tipp: Zeigen Sie, dass die (rechten oder linken) Nebenklassen von H in G offen sind. Benutzen Sie dann, dass H das Komplement der Vereinigung aller zu H fremden Nebenklassen ist.

Aufgabe 3

Seien $\rho_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ drei lineare Abbildungen, die bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ durch die Matrizen $(\rho_a)_{bc} = -\varepsilon_{abc}$ repräsentiert werden, d.h. für den Basisvektor $\vec{e}_c$ gelte $\rho_a(\vec{e}_c) = -\varepsilon_{abc}\vec{e}_b$. Zeigen Sie

$$\left[\rho_a\,,\ \rho_b\right] = \varepsilon_{abc}\,\rho_c\,. \tag{1}$$

Sei $\vec{n} := (n_1, n_2, n_2) \in \mathbb{R}^3$ normiert, d.h. $\|\vec{n}\| = 1$, und $\phi \in [0, 2\pi)$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$R(\phi, \vec{n}) := \exp(\phi\, \vec{n} \cdot \vec{\rho}) \tag{2}$$

eine (aktive) orthogonale Drehung um den Winkel ϕ mit orientierter Drehachse $\vec{n}$ ist. (Orthogonal bezüglich des Skalarprodukts $\delta \in (\mathbb{R}^3)^* \otimes (\mathbb{R}^3)^*$, für das $\delta(\vec{e}_a, \vec{e}_b) = \delta_{ab}$ („Kronecker-Delta") ist.)

Tipp: Zeigen Sie zuerst, dass $\vec{n}\cdot\vec{\rho}(\vec{x}) = \vec{n}\times\vec{x}$ und somit $\left(\vec{n}\cdot\vec{\rho}\right)^2 = -P_\perp$, wobei $P_\perp := \left(\mathbf{1}_3 - \vec{n}\otimes\vec{n}\right)$ der Projektor auf den Orthogonalraum zu $\vec{n}$ ist. Werten Sie damit die Exponentialreihe (2) aus, indem Sie gerade und ungerade Potenzen zusammenfassen. Zeigen Sie, dass Sie das Ergebnis so darstellen können:

$$R(\phi, \vec{n}) = P_\parallel + \left[\cos(\alpha)\,\mathbf{1}_3 + \sin(\alpha)\,\vec{n}\cdot\vec{\rho}\right] \circ P_\perp\,, \tag{3}$$

wobei $P_\parallel := \mathbf{1}_3 - P_\perp$. Machen Sie sich den Inhalt dieser Gleichung geometrisch klar, z.B. indem Sie sie auf $\vec{x}$ anwenden.

Aufgabe 4

Die Pauli Matrizen sind definiert durch

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Sie bilden eine Basis des 3-dimensionalen reellen Vektorraums der spurlosen Hermite'schen 2×2 Matrixen über $\mathbb{C}$.

Zeigen Sie

$$\sigma_a \sigma_b = \mathbf{1}_2 \, \delta_{ab} + i \varepsilon_{abc} \sigma_c \,. \tag{5}$$

Charakterisieren Sie die Lie-Algebra der Gruppe $SU(2)$ und zeigen Sie, dass $\{b_1, b_2, b_3\}$ eine Basis bildet, wobei

$$b_a := -\tfrac{i}{2} \sigma_a \,. \tag{6}$$

Warum bilden die Pauli-Matrizen keine Basis?

Sei $\vec{n} := (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{R}^3$ mit $\|\vec{n}\| = 1$ und $\psi \in [0, 4\pi)$. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} A(\psi, \vec{n}) := \exp(\psi \, \vec{n} \cdot \vec{b}) &= \cos(\psi/2) \, \mathbf{1}_2 + 2 \, \sin(\psi/2) \, \vec{n} \cdot \vec{b} \\ &= \cos(\psi/2) \, \mathbf{1}_2 - i \sin(\psi/2) \, \vec{n} \cdot \vec{\sigma} \,. \end{aligned} \tag{7}$$

Zeigen Sie weiter, dass

$$A(\psi, \vec{n})(\vec{x} \cdot \vec{\sigma}) A^\dagger(\psi, \vec{n}) = \big(R(\psi, \vec{n}) \vec{x} \big) \cdot \vec{\sigma} \,, \tag{8}$$

wobei $R(\psi, \vec{n})$ wie in (2) definiert ist, mit dem Unterschied, dass der Wertebereich von ψ hier bis zu 4π läuft.

Aufgabe 5

Es ist

$$SO(3) = \{ R \in GL(3, \mathbb{R}) \mid RR^\top = \mathbf{1}_3 \,, \ \det(R) = 1 \} \tag{9}$$

$$SU(2) = \{ A \in GL(2, \mathbb{C}) \mid AA^\dagger = \mathbf{1}_2 \,, \ \det(A) = 1 \} \,. \tag{10}$$

Zeigen Sie, dass durch (8) eine Abbildung defniert wird

$$\pi : SU(2) \to SO(3), , \quad A \mapsto R \,, \tag{11}$$

die in den Matrixkomponenten von R folgende Form hat:

$$R_{ab} = \tfrac{1}{2} \, \mathrm{Spur}(\sigma_a A \sigma_b A^\dagger) \,. \tag{12}$$

Zeigen Sie, dass dies ein surjektiver Gruppenhomomorphismus ist und dass $\pi^{-1}(R) = \pm A$ falls $\pi(A) = R$.

Zeigen Sie, dass $SU(2)$ topologisch äquivalent (homöomorph) der 3-dimensionalen Sphäre S^3 ist und dass $\pm A$ antipodale Punktepaare sind. Was ist demnach die Topologie von $SO(3)$?