Übungen zur Vorlesung

Differentialgeometrische Methoden der Physik 2

von DOMENICO GIULINI

Blatt 2

Aufgabe 1

Seien V reeller Vektorraum den Dimension n, $\{e_1, \cdots, e_n\}$ eine Basis von V und $\{\theta_1, \cdots, \theta_n\}$ die zugehörige Dualbasis. Ferner sei $GL(V)$ die Grupper der linearen Bijektionen von V. Auf $GL(V)$ lässt sich mit Hilfe des dualen Basenpaares eine globale Karte $\xi : GL(V) \to R^{n^2}$ wie folgt definieren ($a, b, c \in \{1, \cdots, n\}$):

$$\xi^a_b(g) := \theta^a\big(g(e_b)\big)\,. \tag{1}$$

Zeigen Sie (Summenkonvention):

$$\xi^a_b(gh) = \xi^a_c(g)\xi^c_b(h)\,. \tag{2}$$

Benutzen Sie nun, dass links/rechtsinvariante Vektorfelder auf der Gruppe durch Rechts/Linkstranslationen operieren um folgende Koordinatenausdrücke für die links/rechtsinvarianten Vektorfelder abzuleiten:

$$\bar{X}_L(g) = \xi^a_c(g)X^c_b \frac{\partial}{\partial \xi^a_b}\bigg|_g\,, \tag{3a}$$

$$\bar{X}_R(g) = X^a_c\xi^c_b(g) \frac{\partial}{\partial \xi^a_b}\bigg|_g\,. \tag{3b}$$

$$\tag{3c}$$

Dabei ist

$$X^a_b := \big(\xi^a_b\big)_{*e}X = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\xi^a_b\big(\gamma(t)\big) \tag{4}$$

wenn γ Integralkurve zu $\bar{X}_L$ mit $\gamma(0) = e$ ist.

Rechnen Sie damit explizit nach, dass

$$\big[\bar{X}_L, \bar{Y}_L\big] = \quad \overline{[X, Y]}_L\,, \tag{5a}$$

$$\big[\bar{X}_R, \bar{Y}_R\big] = -\overline{[X, Y]}_R\,, \tag{5b}$$

$$\big[\bar{X}_L, \bar{Y}_R\big] = \quad 0\,. \tag{5c}$$

Hierbei sind die eckigen Klammern auf der linken Seite die Kommutatoren von Vektorfeldern auf $GL(V)$ und auf der rechten Seite die Kommutatoren in $End(V)$ (lineare Selbstabbildungen von V). Damit is nachgerechnet, dass die Lie-Algebra der Link/Rechtsinvarianten Vektorfelder auf $GL(V)$ isomorph/anti-isomorph zur Lie Algebra $End(V)$ ist.

Aufgabe 2

Rechnen Sie für beliebige Lie-Gruppen G nach, dass für alle $X, Y \in T_eG$ gilt:

$$[\bar{X}_L, \bar{Y}_L](e) = -[\bar{X}_R, \bar{Y}_R](e)\,, \tag{6a}$$

$$[\bar{X}_L, \bar{Y}_R](e) = 0\,. \tag{6b}$$

Tipp: Erinnern Sie Sich daran, dass der Kommutator zweier Vektorfelder $[V_1, V_2]$ gleich ist der Lie-Ableitung $L_{V_1}V_2$, wobei $L_{V_1}V_2 = \frac{d}{dt}\big|_{t=0}\big(\mathrm{Fl}^{V_1}_{-t}\big)_* V_2$ (vgl. 1.6 in DG1 Skript, insbesondere (96)). Verwenden Sie nun konsequent, dass $\mathrm{Fl}^{\bar{X}_L}_t(g) = g\mathrm{Fl}^{\bar{X}_L}_t(e)$ und $\mathrm{Fl}^{\bar{X}_R}_t(g) = \mathrm{Fl}^{\bar{X}_L}_t(e)g$, sowie $\mathrm{Fl}^{\bar{X}_L}_t(e) = \mathrm{Fl}^{\bar{X}_R}_t(e)$, wie in der Vorlesung gezeigt.

Aufgabe 3

Sei G Lie-Gruppe, $\{e_1, \cdots, e_n\}$ Basis von T_eG und $\{\bar{e}_1, \cdots, \bar{e}_n\}$ die zugehörigen links-invarianten Vektorfelder auf G. Die $\mathbb{R}$-wertigen Strukturkonstanten sind definiert durch

$$[\bar{e}_a, \bar{e}_b] = C^c_{ab}\bar{e}_c\,. \tag{7}$$

Sei $\{\bar{\theta}^1, \cdots, \bar{\theta}^n\}$ das zu $\{\bar{e}_1, \cdots, \bar{e}_n\}$ duale Baisfeld, d.h. $\bar{\theta}^a(\bar{e}_b) = \delta^a_b$. Zeigen Sie:

$$d\bar{\theta}^c + \tfrac{1}{2}C^c_{ab}\bar{\theta}^a \wedge \bar{\theta}^b = 0\,. \tag{8}$$

Tipp: Erinnern Sie Sich an die für alle Kovektorfelder α und alle Vektorfelder X, Y gültigen Gleichung: $d\alpha(X, Y) = X\big(\alpha(Y)\big) - Y\big(\alpha(X)\big) - \theta\big([X, Y]\big)$. (Siehe (66a) im Skript DG1)

Definieren Sie die folgende, Lie-Algebra wertige 1-Form

$$\omega := e_a \otimes \bar{\theta}^a\,. \tag{9}$$

(Achtung: Hier steht tatsächlich e_a und nicht $\bar{e}_a$).

Zeigen Sie, dass ω unabhängig von der Wahl der Basis $\{e_1, \cdots, e_n\}$ ist. Geben Sie ein basisunabhängige Definition von ω. Zeigen Sie

$$d\omega + \tfrac{1}{2}[\omega, \omega] = 0\,, \tag{10}$$

wobei die eckige Klammer der rechten Seite die gleichzeitige Ausführung des äußeren Produktes der Formen und des Lie-Produktes ihrer Werte bezeichnet.

Aufgabe 4

Jedes $A \in SU(2)$ kann durch Hintereinanderausführung dreier Transformationen wie folgt geschrieben werden

$$A(\varphi, \theta, \psi) := A(\varphi, \vec{e}_z)A(\theta, \vec{e}_y)A(\psi, \vec{e}_z)\,, \tag{11}$$

wobei die $A(\Psi, \vec{n})$ wie in Aufgabe 4 auf Blatt 1 definiert seien. Man nennt das Tripel (φ, θ, ψ) die *Euler Winkel*, wobei $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\theta \in [0, \pi]$ und $\psi \in [0, 4\pi)$. Zeigen Sie, dass die Hyperflächen $\theta = \mathrm{konst.}$ 2-Tori sind, die an den Enden $\theta = 0, \pi$ des Parameterintervalls zu Kreisen entarten (Clifford Tori). Wie sehen auf einem solchen Torus die Linien $\varphi = \mathrm{konst.}$ bzw. $\psi = \mathrm{konst.}$ aus?

Aufgabe 5

Betrachten Sie die matrixwertige Funktion $A(\varphi, \theta, \psi)$ aus (11). Nehmen Sie deren differential dA. Zeigen Sie, dass $A^{-1}dA$ und dAA^{-1} links- bzw. rechtsinvariante 1-Formen mit Werten in der Lie-Algebra sind. Schreibt man

$$A^{-1}dA = -\tfrac{i}{2}\sigma_a F_a^L\,, \tag{12}$$

$$dAA^{-1} = -\tfrac{i}{2}\sigma_a F_a^R\,, \tag{13}$$

dann sind $\{F_1^L, F_2^L, F_3^L\}$ und $\{F_1^R, F_2^R, F_3^R\}$ global definierte Basen für links- bzw. rechtsinvariante 1-Formen. Zeigen Sie, dass diese in Euler-Winkeln folgende Darstellungen besitzen:

$$F_1^L = \sin(\psi)\,d\theta - \cos(\psi)\sin(\theta)\,d\varphi \tag{14a}$$

$$F_2^L = \cos(\psi)\,d\theta + \sin(\psi)\sin(\theta)\,d\varphi \tag{14b}$$

$$F_3^L = d\psi + \cos(\theta)\,d\varphi\,, \tag{14c}$$

$$F_1^R = -\sin(\varphi)\,d\theta + \cos(\varphi)\sin(\theta)\,d\psi \tag{15a}$$

$$F_2^R = \cos(\varphi)\,d\theta + \sin(\varphi)\sin(\theta)\,d\psi \tag{15b}$$

$$F_3^R = d\varphi + \cos(\theta)\,d\psi\,. \tag{15c}$$

Wie können Sie (15) aus (14) erhalten ohne zu rechnen?

Die zu den links- bzw. rechtsinvarianten Basen $\{F_1^L, F_2^L, F_3^L\}$ und $\{F_1^R, F_2^R, F_3^R\}$ dualen Basen der Tangentialräume seien $\{V_1^L, V_2^L, V_3^L\}$ und $\{V_1^R, V_2^R, V_3^R\}$. Sie sind ebenfalls links- bzw. rechtsinvariant und global definiert. Zeigen Sie, dass diese in Euler-Koordinaten folgende Darstellungen besitzen

$$V_1^L = \cos(\psi)\cot(\theta)\frac{\partial}{\partial\psi} + \sin(\psi)\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\cos(\psi)}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\varphi} \tag{16a}$$

$$V_2^L = -\sin(\psi)\cot(\theta)\frac{\partial}{\partial\psi} + \cos(\psi)\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\sin(\psi)}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\varphi} \tag{16b}$$

$$V_3^L = \frac{\partial}{\partial\psi}\,, \tag{16c}$$

$$V_1^R = \frac{\cos(\varphi)}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\psi} - \sin(\varphi)\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot(\theta)\cos(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi} \tag{17a}$$

$$V_2^R = \frac{\sin(\varphi)}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\psi} + \cos(\varphi)\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot(\theta)\sin(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi} \tag{17b}$$

$$V_3^R = \frac{\partial}{\partial\varphi}\,. \tag{17c}$$

Wieder ist es möglich (17) aus (16) ohne Rechnung zu erhalten; aber wie?

Geben Sie die Kommutatoren aller 6 Vektorfelder $\{V_1^L, V_2^L, V_3^L, V_1^R, V_2^R, V_3^R\}$ an.