Übungen zur Vorlesung

Differentialgeometrische Methoden der Physik 2

von DOMENICO GIULINI

Blatt 3

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass jede effektive und transitive Wirkung einer Abel'schen Gruppe G auf einer Menge M sogar einfach transitiv ist. Tipp: Nehmen Sie an, für ein $m \in M$ gibt es zwei $g, g' \in G$, so dass $gm = g'm$. Folgern Sie, dass diese Gleichung dann für alle $m \in M$ gilt, und dass deshalb $g = g'$ sein muss.

Aufgabe 2

Man betrachte folgende Wirkung der Gruppe $G = (\mathbb{R}, +)$ auf der Mannigfaltigkeit $M = \mathbb{R}$:

$$\Phi : G \times M \to M\,, \quad \Phi(t, x) \mapsto e^t x\,. \tag{1}$$

Ist Φ frei?. Bestimmen Sie die Menge der Orbits M/G. M/G trage die Quotiententopologie. Welche Mengen in M/G sind offen? Warum ist M/G nicht Hausdorff'sch? Beschreiben Sie die Menge

$$R := \Big\{ \big(m, \Phi_g(m)\big) \mid (g, m) \in G \times M \Big\} \subseteq M \times M\,. \tag{2}$$

Aufgabe 3

Sei $SL(2, \mathbb{R})$ die Gruppe der reellen 2×2 Matrizen mit Determinante 1. Zeigen Sie, dass in $SL(2, \mathbb{R})$ keine Matrix A mit $\mathrm{Spur}(A) < -2$ im Bild der Exponentialabbildung liegt, und dass somit das Bild der Exponentialabbildung offene Gebiete ausspart. Anleitung: Machen Sie sich zuerst die allgemeine Tatsache klar, dass jede Matrix im Bild der Exponentialabbildung eine Wurzel besitzt; d.h. für $A = \exp(h)$ existiert ein $B \in SL(2, \mathbb{R})$ mit $B^2 = A$. Zeigen Sie dann, dass $A \in SL(2, \mathbb{R})$ diagonalisierbar ist falls $\mathrm{Spur}(A)| < -2$. Rechnen Sie schließlich nach, dass für diagonales A mit ungleichen Eigenwerten aus $B^2 = A$ folgt, dass auch B diagonal ist. Dies führt Sie zum gewünschten Widerspruch. (Ist $SL(2, \mathbb{R})$ zusammenhängend?)

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass in einer zusammenhängenden Lie Gruppe jedes Element das Produkt *endlich vieler* Elemente aus dem Bild der Exponentialabbildung ist. Tipp: Zeigen Sie, dass die Menge der Gruppenelemente, die aus endlich vielen Produkte von Bildelementen der Exponentialabbildung bestehen, eine *offene* Untergruppe bilden. Verwenden Sie dann Aufgabe 2 von Übungsblatt 1.

Aufgabe 5

Zeigen Sie: Auf einer Lie Gruppe kann eine kovariante Ableitung eindeutig durch die Forderung festgelegt werden, dass alle linksinvarianten Vektorfelder kovariant konstant sind. Berechnen Sie die zugehörige Torsion und Krümmung.

Aufgabe 6

Sei G eine halbeinfache Lie Gruppe mit Killing-Form $\kappa \in T_e^*G \otimes T_e^*G$, die definiert ist durch $\kappa(X,Y) := \mathrm{Spur}(\mathrm{ad}_X \circ \mathrm{ad}_Y)$ (vgl. Vorlesung). Durch Linkstranslationen wird diese zu einer linksinvarianten semi-Riemann'schen Metrik g auf G fortgesetzt. Sei ∇ die Levi-Civita kovariante Ableitung zu dieser Metrik. Zeigen Sie, dass für je zwei Linksinvariante Vektorfelder $\bar{X}_L$ und $\bar{Y}_L$ gilt:

$$\nabla_{\bar{X}_L} \bar{Y}_L = \tfrac{1}{2}\overline{[X,Y]}_L\,. \tag{3}$$

(Tipp: Benutzen Sie Formel (164a) des DG1-Skripts.)

Zeigen Sie, dass der Riemann'sche Krümmungstensor gegeben ist durch

$$R(\bar{X}_L,\bar{Y}_L)\bar{Z}_L = -\tfrac{1}{4}\overline{[[X,Y],Z]}_L\,. \tag{4}$$

und dass der Ricci-Tensor der Gleichung genügt

$$\mathrm{Ric} = -\tfrac{1}{4}g\,. \tag{5}$$

Tipp: Erinnern Sie Sich daran, dass die $(\bar{Y}_L,\bar{Z}_L)$–Komponente des Ricci-Tensors gerade die Spur der Abbildung $\bar{X}_L \mapsto R(\bar{X}_L,\bar{Y}_L)\bar{Z}_L$ ist.

Zeigen Sie weiter: Ist $\{e_1,\cdots,e_n\}$ Basis von T_eG mit Strukturkonstanten $[e_a,e_b] = C^c_{ab}e_c$, so sind die Komponenten des Krümmungstensors bezüglich des zugehörigen linksinvarianten Basisfeldes gegeben durch die Konstanten

$$R^a{}_{bcd} = -\tfrac{1}{4}\,C^a_{nb}C^n_{cd}\,. \tag{6}$$

Bestätigen Sie damit erneut (5).

Wie verändern sich die Ausdrücke (4) und (5), wenn Sie die Metrik mit einer Konstante $K \in \mathbb{R} - \{0\}$ multiplizieren?

Aufgabe 7

Sei $\{F_1^L, F_2^L, F_3^L\}$ die in Aufgabe 5 von Blatt 2 definierte Basis linksinvarianter 1-Formen auf der $SU(2)$. Es gilt also $dF_a^L = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}F_b^L \wedge F_c^L$. Betrachten Sie nun für $\lambda \in \mathbb{R}_+$ folgende Riemann'sche Metrik auf der $SU(2)$

$$g = F_1^L \otimes F_1^L + F_2^L \otimes F_2^L + \lambda^2\, F_3^L \otimes F_3^L\,. \tag{7}$$

Welche Symmetrien besitzt diese? Berechnen Sie mit Hilfe der Cartan'schen Strukturgleichungen den Riemann'schen Krümmungstensor, den Ricci-Tensor und die Skalare Krümmung für den Levi-Civita Zusammenhang (torsionsfrei und metrisch) zu g. Diskutieren Sie die Resultate, insbesondere hinsichtlich der Abhängigkeit von λ.