Übungen zur Vorlesung

Differentialgeometrische Methoden der Physik 2

von Domenico Giulini

Blatt 4

Aufgabe 1

Sei G Lie-Gruppe und $\bar{X}_L$, $\bar{X}_R$ die zum Element X ihrer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ gehörigen links- und rechts-invarianten Vektorfelder. Zeigen Sie

$$R_{h*g}\bar{X}_L(g) = \overline{\left[\mathrm{Ad}_{h^{-1}}(X)\right]}_L(gh)\,, \tag{1a}$$
$$L_{h*g}\bar{X}_R(g) = \overline{\left[\mathrm{Ad}_{h}(X)\right]}_R(hg)\,. \tag{1b}$$

Zeigen Sie, dass dies impliziert

$$\bar{X}_R(g) = \overline{\left[\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(X)\right]}_L(g)\,, \tag{2a}$$
$$\bar{X}_L(g) = \overline{\left[\mathrm{Ad}_{g}(X)\right]}_R(g)\,. \tag{2b}$$

Aufgabe 2

Sei $\kappa \in \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^*$ symmetrische Bilinearform auf der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ der Lie Gruppe G. Diese definiert links- und rechts-invariante symmetrische Tensorfelder $\bar{\kappa}_{L,R} \in ST^0_2(G)$ auf G durch

$$\bar{\kappa}_L(g) := (L_{g^{-1}})^*_e\,\kappa\,, \tag{3a}$$
$$\bar{\kappa}_R(g) := (R_{g^{-1}})^*_e\,\kappa\,. \tag{3b}$$

Zeigen Sie: Ist κ Ad-invariant, das heißt gilt für alle $g \in G$ und $X, Y \in \mathfrak{g}$

$$\kappa\big(\mathrm{Ad}_g(X), \mathrm{Ad}_g(X)\big) = \kappa\big(X, Y\big)\,, \tag{4}$$

dann ist $\bar{\kappa}_L = \bar{\kappa}_R$. Solche Tensorfelder auf Lie-Gruppen nennt man *bi-invariant*. Ist (4) für die Killing-Form erfüllt?

Aufgabe 3

Sei G n-dimensionale Lie Gruppe und $\mu \in \bigwedge^n \mathfrak{g}^*$ eine n-Form auf ihrer Lie-Algebra. Die zugehörigen links- und rechts-invarianten Felder von n-Formen (Volumenformen) sind definiert durch

$$\bar{\mu}_L(g) := (L_{g^{-1}})^*_e\,\mu\,, \tag{5a}$$
$$\bar{\mu}_R(g) := (R_{g^{-1}})^*_e\,\mu\,. \tag{5b}$$

Zeigen Sie: Ist G *unimodular*, das heißt gilt für alle $g \in G$

$$\det\big(\mathrm{Ad}_g\big) = 1\,, \tag{6}$$

dann ist $\bar{\mu}_L = \bar{\mu}_R$.

Aufgabe 4

Betrachten Sie die folgende Metrik auf $SU(2)$

$$g = \sum_{a=1}^{3} \lambda_a^2 \, F_a^L \otimes F_a^L \,. \tag{7}$$

Dabei seien $\{F_1^L, F_2^L, F_3^L\}$ die in Aufgabe 5 von Blatt 2 definierte Basis links-invarianter 1-Formen auf der $SU(2)$. Diese ist eine Verallgemeinerung der Metrik (7) von Aufgabe 7 auf Blatt 3. Bestimmen Sie die Symmetrien von g in Abhängigkeit davon, ob die Menge der positiven Zahlen $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ aus paarweise verschiedenen, zwei gleichen oder drei gleichen Elementen besteht.

Aufgabe 5

Auf der Lie-Gruppe $SU(2)$ wirkt die Untergruppe

$$H := \left\{ A = \exp\left(-\tfrac{i}{2}\tau_3\psi\right) : \psi \in [0, 4\pi) \right\} \tag{8}$$

durch Rechts-Multiplikation frei und eigentlich:

$$H \times SU(2) \to SU(2)\,, \quad (h, g) \mapsto R_h(g) := gh = g \exp\left(-\tfrac{i}{2}\tau_3\psi\right) \tag{9}$$

Diese macht $SU(3) \cong S^3$ zum Totalraum eines Hauptfaserbündels mit Faser $H \cong U(1)$.

Zeigen Sie, dass in Euler-Winkeln das zum Element $-\frac{i}{2}\tau_3$ der Lie-Algebra von H gehörige vertikale Vektorfeld gegeben ist durch (vgl. (16c) Blatt 2 Aufgabe 5)

$$V_3^L = \partial/\partial\psi\,, \tag{10}$$

und dass durch die links-invariante 1-Form (vgl. (14c) Blatt 2 Aufgabe 5)

$$F_3^L = d\psi + \cos\theta \, d\varphi\,, \tag{11}$$

ein Zusammenhang definiert wird. Was ist die Basismannigfaltigkeit B?

Aufgabe 6

Man betrachte die 2-dimensionale Lie-Gruppe $G = \mathbb{R} \rtimes_\theta \mathbb{R}_+$, wobei der Homomorphismus $\theta : \mathbb{R}_+ \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R})$ durch $\theta_\alpha(a) := \alpha a$ gegeben ist. Diese ist isomorph zur Gruppe der orientierungserhaltenden affinen Transformationen der reellen Achse. Das Multiplikationsgesetz ist $(a, \alpha)(b, \beta) = (a + \alpha b\,,\, \alpha\beta)$. Wir können G mit folgender Gruppe reeller 2×2 Matrizen identifizieren (definierende Darstellung)

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & \alpha \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}_+ \right\}. \tag{12}$$

Zeigen Sie, dass

$$e_T := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\,, \quad e_D := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\,, \tag{13}$$

eine Basis der Lie-Algebra bilden und dass $[e_D, e_T] = e_T$. (Hier stehen die Indizes T für „Translation" und D für „Dilatation".) Wir bezeichnen die zugehörigen links- und rechts-invarianten Vektorfelder mit $\bar{e}^{(L)}_{T,D}$ bzw. $\bar{e}^{(R)}_{T,D}$ und die dazu dualen links- und rechts-invarianten 1-Formen mit $\bar{\theta}^{(L)}_{T,D}$ bzw. $\bar{\theta}^{(R)}_{T,D}$. Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 1 auf Blatt 2, dass die zu dieser Basis gehörigen links- und rechts-invarianten Vektorfelder auf G gegeben sind durch

$$\bar{e}^{(L)}_T = \alpha\frac{\partial}{\partial a}\,, \qquad \bar{e}^{(L)}_D = \alpha\frac{\partial}{\partial \alpha}\,, \tag{14a}$$

$$\bar{e}^{(R)}_T = \frac{\partial}{\partial a}\,, \qquad \bar{e}^{(R)}_D = a\frac{\partial}{\partial a} + \alpha\frac{\partial}{\partial \alpha}\,, \tag{14b}$$

und

$$\bar{\theta}^{(L)}_T = \frac{da}{\alpha}\,, \qquad \bar{\theta}^{(L)}_D = \frac{d\alpha}{\alpha}\,, \tag{15a}$$

$$\bar{\theta}^{(R)}_T = da - \frac{a}{\alpha}\,d\alpha\,, \qquad \bar{\theta}^{(R)}_D = \frac{d\alpha}{\alpha}\,. \tag{15b}$$

Rechnen Sie nach, dass die adjungierte Darstellung gegeben ist durch

$$\mathrm{Ad}_{(a,\alpha)}(e_T) = \alpha\, e_T\,, \qquad \mathrm{Ad}_{(a,\alpha)}(e_D) = -a\, e_T + e_D \tag{16}$$

und zeigen Sie damit, dass (14) gerade (2) entspricht.

Sei $\mu \in \bigwedge^2 \mathfrak{g}^*$ definiert durch $\mu := \theta_T \wedge \theta_D$, wobei $\theta_{T,D}$ die zu $e_{T,D}$ duale Basis bezeichnet. Zeigen Sie

$$\bar{\mu}_L = \frac{da \wedge d\alpha}{\alpha^2}\,, \tag{17a}$$

$$\bar{\mu}_R = \frac{da \wedge d\alpha}{\alpha}\,. \tag{17b}$$

Sei $\kappa \in \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^*$ die positive definite symmetrische Bilinearform mit $\kappa(e_T, e_T) = \kappa(e_D, e_D) = 1$ und $\kappa(e_T, e_D) = 0$. Zeigen Sie

$$\bar{\kappa}_L = \frac{da \otimes da + d\alpha \otimes d\alpha}{\alpha^2}\,, \tag{18a}$$

$$\bar{\kappa}_R = \left(da - \tfrac{a}{\alpha}\,d\alpha\right) \otimes \left(da - \tfrac{a}{\alpha}\,d\alpha\right) + \frac{d\alpha \otimes d\alpha}{\alpha^2}\,. \tag{18b}$$

Berechnen Sie mit Hilfe der Cartan'schen Sktrukturgleichungen die zum jeweiligen Levi-Civita Zusammenhang gehörige Gauß'sche Krümmung (d.h. hier die auf eine Orthonormalbasis bezogene einzig nicht-verschwindende Komponente des Riemann'schen Krümmungstensors) und zeigen Sie, dass diese für $\bar{\kappa}_L$ und $\bar{\kappa}_R$ übereinstimmend den Wert -1 besitzt.