Übungen zur Vorlesung

Differentialgeometrische Methoden der Physik 2

von DOMENICO GIULINI

Blatt 5

Aufgabe 1

Seien $A \in S\Lambda^a(M, \dot{G})$, $B \in S\Lambda^b(M, \dot{G})$ und $C \in S\Lambda^c(M, \dot{G})$ Felder von Formen der Grade a, b, c auf der Mannigfaltigkeit M mit Werten in der Lie-Algebra $\dot{G}$ der Gruppe G. Das verallgemeinerte äußere Produkt $\dot{\wedge}$ solcher Formen wurde in der Vorlesung erklärt. Zeigen Sie die Gültigkeit folgender modifizierter Jacobi Identität:

$$(-1)^{ac}\big(A\dot{\wedge}B\big)\dot{\wedge}C + (-1)^{ba}\big(B\dot{\wedge}C\big)\dot{\wedge}A + (-1)^{cb}\big(C\dot{\wedge}A\big)\dot{\wedge}B = 0\,. \tag{1}$$

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die Komponenten der Krümmung eines Hauptfaserbündels, dessen Strukturgruppe ein Matrixgruppe $G \subseteq GL(n, \mathbb{R})$ ist (wir schreiben $\{A^\alpha_\beta\}$ mit $\alpha, \beta \in \{1, \cdots, n\}$), gegeben sind durch

$$\begin{aligned} \Omega^\alpha_{\beta\,ab} &= \Omega^\alpha_\beta(e_a, e_b) \\ &= e_a(\omega^\alpha_{b\,\beta}) - e_b(\omega^\alpha_{a\,\beta}) - C^c_{ab}\omega^\alpha_{c\,\beta} + \omega^\alpha_{a\gamma}\omega^\gamma_{b\beta} - \omega^\alpha_{b\gamma}\omega^\gamma_{a\beta} \end{aligned} \tag{2}$$

wobei $\{e_1, \cdots, e_m\}$ ein Basisfeld auf dem Totalraum P mit $[e_a, e_b] = C^c_{ab}\, e_c$ ist. Warum würden es ausreichen, sich hier auf ein Feld $\{\bar{e}_1, \cdots, \bar{e}_{m-n}\}$ von Basen der horizontalen Unterräume einzuschränken. Vergleichen Sie dies mit der Ihnen bekannten Formel, die die Komponenten des Riemann'schen Krümmungstensors durch die Christoffelsymbole Γ^c_{ab} ausdrückt.

Aufgabe 3

Sei $\omega \in S\Lambda^1(P, \dot{G})$ Zusammenhang (gemäß Def. 2) auf dem Hauptfaserbündel P, d.h. erfülle ω die beiden Bedingungen (für alle $\xi \in \dot{G}$)

$$\omega(V^\xi) = \xi\,, \tag{3a}$$

$$R^*_g\omega = Ad_{g^{-1}} \circ \omega\,. \tag{3b}$$

Zeigen Sie: Ist $f \in Aut(P)$ dann ist $f^*\omega$ wieder ein Zusammenhang.

Aufgabe 4

Auf dem Minkowskiraum $M \cong \mathbb{R}^4$ mit Standkoordinaten $x^\mu = \{ct, x, y, z\}$ und Metrik $\eta = c^2\, dt \otimes dt - dx \otimes dx - dy \otimes dy - dz \otimes dz$ betrachte man die folgende

Wirkung der Gruppe $(\mathbb{R},+)$:

$$\Phi:\mathbb{R}\times M\to M\,,\quad \Phi_s(t,\vec{x}):=\big(t+s\,,\,R(\vec{e}_z,ws)\vec{x}\big) \tag{4}$$

Dabei ist $R(\vec{e}_z,ws)\in SO(3)$ eine räumliche Drehung um den Winkel ws.

Zeigen Sie, dass man M als Totalraum eines Hauptfaserbündels mit Strukturgruppe $(\mathbb{R},+)$ und Basis $\mathbb{R}^3$ auffassen kann.

Zeigen Sie, dass das vertikale Vektorfeld zum Element $\xi=1$ der Lie-Algebra von $(\mathbb{R},+)$ gegeben ist durch

$$V(t,\vec{x}):=V^{\xi=1}(t,\vec{x})=\partial_t-wy\partial_x+wx\partial_y=\partial_t+w\partial_\varphi\,, \tag{5}$$

wobei $\tan\varphi=y/x$ Schränken Sie M nun auf den Bereich ein, in dem V zeitartig ist, also auf

$$Z:=\{(t,\vec{x}):(x^2+y^2)<(c/w)^2\}\subset M\,. \tag{6}$$

Zeigen Sie, dass auch Z Totalraum ein Hauptfaserbündels mit Strukturgruppe $(\mathbb{R},+)$ und Basis $B\subset\mathbb{R}^3$ ist, wobei B den offenen Ball um den Ursprung mit Radius c/w bezeichnet.

Zeigen Sie, dass die orthogonalen Komplemente zu $V(t,\vec{x})$ einen Zusammenhang im Sinne der ersten Definition in der Vorlesung bilden. Die horizontale Distribution ist also gegeben durch

$$H_{(t,\vec{x})}:=\{y\in\mathbb{R}^4:\eta\big(y,V(t,\vec{x})\big)=0\}\,. \tag{7}$$

Zeigen Sie damit, das

$$\omega=\frac{\eta(V,\,\cdot\,)}{\eta(V,V)} \tag{8a}$$

die zugehörige Zusammenhangs 1-Form im Sinne der zweiten Definition der Vorlesung ist, also insbesondere die Bedingungen (3) erfüllt, und dass ω in folgender Form geschrieben werden kann,

$$\omega=\frac{dt-\frac{\rho^2w}{c^2}d\varphi}{1-\big(\frac{\rho w}{c}\big)^2}=dt-\frac{\frac{\rho^2w}{c^2}d\psi}{1-\big(\frac{\rho w}{c}\big)^2}\,, \tag{8b}$$

wobei $\rho:=\sqrt{x^2+y^2}$ und $\psi=\varphi-wt$ (mitrotierende zylindrische Polarkoordinaten). Zeigen Sie als Kotntrolle nochmals direkt, dass diese Ad-äquivariant unter der Wirkung (4) ist (das geht ohne Rechnung durch bloßes Hinsehen!).

Identifizieren Sie die Basis $B=P/G$ mit der Hyperfläche $t=0$, und parametrisieren Sie diese durch die zylindrischen Polarkoordinaten (ρ,ψ,z). Berechnen Sie die Holonomie der Kurve $\gamma:[0,1]\to B$, $\gamma(s):=\big(R,2\pi s,0\big)$ und rechnen Sie das Ergebnis in die Eigenzeit (Bogenlänge/c) entlang der Faser um. Finden Sie eine physikalische Interpretation dieses “Zeitsprungs”.

Machen Sie die Basis B zu einer Riemann’schen Mannigfaltigkeit mit Metrik h durch die Festsetzung, dass das Skalarprodukt $h_b(X_b,Y_b)$ zweier Vektoren $X_b,Y_b\in T_bB$ gegeben ist durch

$$h_b(X_b,Y_b):=-\eta(X_p^H,Y_p^H)\,, \tag{9}$$

wobei X_p^H, Y_p^H horizontale Lifts von X_b, Y_b an den Punkt p in der Faser über b sind. Argumentieren Sie, dass dies tatsächlich von der Wahl des Punktes $p \in \pi^{-1}(b)$ unabhängig ist (sonst wäre die Definition (9) ja nicht sinnvoll). Zeigen Sie

$$h = -\eta + \eta(V, V)\omega \otimes \omega \tag{10}$$

und berechnen Sie daraus die Koordninatendarstellung auf B:

$$h = dz \otimes dz + d\rho \otimes d\rho + \frac{\rho^2\, d\psi \otimes d\psi}{1 - \left(\frac{\rho w}{c}\right)^2}\,. \tag{11}$$

Berechnen Sie mit Hilfe der Cartan'schen Strukturgleichungen die Krümmung des Levi-Civita Zusammenhangs bezüglich h, insbesondere die Gauß'sche Krümmung der Kreisscheibe, die durch Schneiden von B mit der Ebene $z = 0$ entsteht. Finden Sie eine physikalische Interpretation.

Aus (10) ergibt sich mit (11) und (8b) folgende Darstellung der Minkowskimetrik

$$\begin{aligned}\eta = \left(1 - \left(\frac{\rho w}{c}\right)^2\right)\left(c\, dt - \frac{\frac{\rho^2 w}{c}\, d\psi}{1 - \left(\frac{\rho w}{c}\right)^2}\right) \otimes \left(c\, dt - \frac{\frac{\rho^2 w}{c}\, d\psi}{1 - \left(\frac{\rho w}{c}\right)^2}\right) \\ - dz \otimes dz - d\rho \otimes d\rho - \frac{\rho^2\, d\psi \otimes d\psi}{1 - \left(\frac{\rho w}{c}\right)^2}\,.\end{aligned} \tag{12}$$

Rechnen Sie nach, dass dies in der Tat die Form ist, in die $\eta = c^c dt \otimes dt - dz \otimes dz - d\rho \otimes d\rho - \rho^2 d\varphi \otimes d\varphi$ durch die Substitution $\varphi \mapsto \psi := \varphi - wt$ (unter Festlassung von t, z, ρ) übergeht (Übergang zu "mitrotierenden" Koordinaten).