Übungen zur Vorlesung

Theorie der Gravitationswellen

von Domenico Giulini

Blatt 1

Aufgabe 1

Die Poisson-Gleichung für das Newton'sche Gravitationspotential sei um zwei Terme verallgemeinert, von denen der eine (μ) ein sogenannter „Yukawa Term“ ist, der eine Masse $m_g = \hbar\mu/c$ des Gravitons repräsentiert. Der andere Term (Λ) ist eine „kosmologische Konstante“, die eine zusätzliche, konstante Massendichte $\rho_\Lambda = \Lambda/4\pi G$ repräsentiert. Die Gleichung lautet dann

$$\Delta\phi - \mu^2\phi - \Lambda = 4\pi\rho\,. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass die Lösung für eine Punktmasse, entsprechend $\rho(\vec{x}) = M\,\delta^{(3)}(\vec{x})$, gegeben ist durch

$$\phi(r) = \frac{\Lambda}{\mu^2}\left\{\frac{\sinh(\mu r)}{\mu r} - 1\right\} - \frac{GM}{r}\,\exp(-\mu r) \tag{2}$$

wenn man fordert, dass für $\mu \to 0$ die Lösung vernünftig bleibt (d.h. in die entsprechende Lösung der Gleichung (1) ohne μ-Term übergeht). Setzen Sie $\Lambda = 0$ und leiten Sie eine obere Schranke für m_g aus der Tatsache ab, dass gravitativ gebundene Systeme von Galaxien (Galaxiencluster) über Distanzen von $2\cdot 10^6$ Lichtjahren existieren. (Vgl. Ergänzungen: Goldhaber & Nieto 1974).

Aufgabe 2

Sei V ein Vektorraum der Dimension d, $V^{\otimes n}$ das n-fache Tensorprodukt, $V_S^{\otimes n} \subset V^{\otimes n}$ der Unterraum der vollständig symmetrischen Tensoren und $V_{ST}^{\otimes n} \subset V_S^{\otimes n}$ der Unterraum der spurfreien symmetrischen Tensoren. Geben Sie die Dimensionen von $V_S^{\otimes n}$ und $V_{ST}^{\otimes n}$ an und betrachten Sie das Verhältnis beider als Funktion von n. Was schließen Sie daraus hinsichtlich der Information, die das Newton'sche Gravitationspotential eines Körpers über dessen Massenmultipole verrät, insbesondere für große Polordnungen?

Aufgabe 3

Seien $\lambda_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ drei lineare Abbildungen, die bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ durch die Matrizen $(\lambda_a)_{bc} = -\varepsilon_{abc}$ repräsentiert werden, d.h. für den Basisvektor $\vec{e}_c$ gelte $\lambda_a(\vec{e}_c) = -\varepsilon_{abc}\vec{e}_b$. Zeigen Sie

$$\left[\lambda_a\,,\,\lambda_b\right] = \varepsilon_{abc}\,\lambda_c \tag{3}$$

und dass die Abbildung

$$D(\vec{\alpha}) := \exp(\alpha_a \lambda_a) \tag{4a}$$

eine (aktive) orthogonale Drehung um den Winkel $\alpha := \|\vec{\alpha}\|$ mit orientierter Drehachse $\vec{n} := \vec{\alpha}/\|\vec{\alpha}\|$ darstellt. (Orthogonal bezüglich des Skalarprodukts $\delta \in (\mathbb{R}^3)^* \otimes (\mathbb{R}^3)^*$, für das $\delta(\vec{e}_a, \vec{e}_b) = \delta_{ab}$ („Kronecker-Delta“) ist.)

Tipp: Zeigen Sie zuerst, dass $\vec{\alpha} \cdot \vec{\lambda}(\vec{x}) = \vec{\alpha} \times \vec{x}$ *und somit* $\big(\vec{\alpha} \cdot \vec{\lambda}\big)^2 = -\alpha^2\, P_\perp$, *wobei* $P_\perp := \big(\mathbf{1} - \vec{n} \otimes \vec{n}\big)$ *der Projektor auf den Orthogonalraum zu* $\vec{n}$ *ist. Werten Sie damit die Exponentialreihe (4a) aus, indem Sie gerade und ungerade Potenzen zusammenfassen. Zeigen Sie, dass Sie das Ergebnis so darstellen können:*

$$D(\vec{\alpha}) := \big[1 - P_\perp\big] + \big[\cos(\alpha)\,\mathbf{1} + \sin(\alpha)\,\vec{n} \cdot \vec{\lambda}\big] \circ P_\perp\,. \tag{4b}$$

Machen Sie sich den Inhalt dieser Gleichung geometrisch klar, z.B. indem Sie sie auf $\vec{x}$ *anwenden.*

Auf dem n-fachen Tensorprodukt $T^n\mathbb{R}^3$ betrachte man nun die Abbildung $D^{\otimes n}(\vec{\alpha})$ (n-faches Tensorprodukt der Abbildung (4a)). Zeigen Sie, dass die symmetrisch-spurlosen Tensoren einen unter diesen Abbildungen invarianten Unterraum von $T^n\mathbb{R}^3$ der Dimension $2n+1$ bilden. Zeigen Sie weiter, dass dieser Unterraum irreduzibel ist, indem sie nachweisen, dass er der Eigenraum zum Eigenwert $-n(n+1)$ des Operators $\Lambda_a\Lambda_a$ (Summenkonvention) ist, wobei

$$\Lambda_a := (\lambda_a \otimes \mathbf{1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}) + (\mathbf{1} \otimes \lambda_a \otimes \mathbf{1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}) + \cdots + (\mathbf{1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1} \otimes \lambda_a)\,. \tag{5}$$

(n Tensorfaktoren für jeden der n Summanden)