Übungen zur Vorlesung

Theorie der Gravitationswellen

von DOMENICO GIULINI

Blatt 2

Aufgabe 1

Sei $\{\vec{e}_a\}$ kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$ mit Skalarprodukt $\delta(\vec{e}_a, \vec{e}_b) = \delta_{ab}$ („Kronecker Delta"). Im Raum $T^2\mathbb{R}^3 := \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$ betrachte man die linearen Abbildungen P_A, P_S und P_T, deren Komponenten bezüglich der kanonischen Basis $\{\vec{e}_a \otimes \vec{e}_b\}$ von $T^2\mathbb{R}^3$ gegeben sind durch

$$P_{A\,nm}^{\ ab} := \tfrac{1}{2}\left(\delta^a_n\delta^b_m - \delta^b_n\delta^a_m\right), \tag{1a}$$

$$P_{S\,nm}^{\ ab} := \tfrac{1}{2}\left(\delta^a_n\delta^b_m + \delta^b_n\delta^a_m\right), \tag{1b}$$

$$P_{T\,nm}^{\ ab} := \tfrac{1}{3}\delta^{ab}\delta_{nm}\,. \tag{1c}$$

Zeigen Sie, dass es sich hierbei um Projektionsoperatoren handelt und interpretieren Sie diese. Zeigen Sie weiter, dass

$$P_{ST} = P_S - P_T \tag{1d}$$

ebenfalls ein Projektionsoperator ist und interpretieren Sie diesen. Zeigen Sie, dass die zu den Projektionsoperatoren P_{ST}, P_A, P_T gehörigen Unterräume V_{ST}, V_A, V_T von $T^2\mathbb{R}^3$ bezüglich des inneren Produktes $\delta \otimes \delta$ paarweise orthogonal liegen.

Sei $D^{(1)} : SO(3) \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die definierende Darstellung der Drehgruppe und $D^{(1)} \otimes D^{(1)}$ ihre Darstellung auf $T^2\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass V_{ST}, V_A, V_T irreduzible Darstellungen der Drehgruppe zu den Werten (Drehimpulsen) 2,1,0 von ℓ tragen, was der Clebsch-Gordan-Reihe (orthogonale direkte Zerlegung)

$$D^{(1)} \otimes D^{(1)} = D^{(2)} \oplus D^{(1)} \oplus D^{(0)} \tag{2}$$

entspricht.

Gehen Sie dazu wie folgt vor: Die Erzeugenden der Drehungen („infinitesimale Drehungen") in $\mathbb{R}^3$ sind die antisymmetrischen 3×3 Matrizen (vgl. Aufgabe 3 von Blatt 1). Eine Basis ist gegeben durch die drei Matrizen $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$, deren Komponenten $(\lambda_a)_{bc} = -\varepsilon_{abc}$ sind. Eine Basis für die Erzeugenden der Drehungen auf $T^2\mathbb{R}^3$ ist dann gegeben durch

$$\Lambda_a = \lambda_a \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \lambda_a\,. \tag{3}$$

($\mathbf{1}$ bezeichnet hier die 3×3 Einheitsmatrix.) Um eine irreduzible Darstellung der Drehgruppe in einem Unterraum von $T^2\mathbb{R}^3$ zu klassifizieren, müssen Sie den Eigenwert des Operators $\Lambda_a\Lambda_a$ (Summenkonvention) auf diesem Unterraum bestimmen, wobei der zu $D^{(\ell)}$ gehörige Eigenwert durch $-\ell(\ell+1)$ gegeben ist. Beispielsweise rechnet man leicht nach, dass $\lambda_a\lambda_a = -2\cdot\mathbf{1}$. Also folgt aus (3), dass

$$\Lambda_a\Lambda_a = -4\mathbf{1}\otimes\mathbf{1} + 2\lambda_a\otimes\lambda_a\,. \tag{4}$$

Benutzen Sie nun $\mathbf{1}\otimes\mathbf{1} = P_A + P_S$ (trivial) und $\lambda_a\otimes\lambda_a = 3P_T - (P_S - P_A)$ (Multiplikation zweier ε_{abc} mit Kontraktion über einen Index) um die rechte Seite von (4) durch die Projektoren P_{ST}, P_A und P_T auszudrücken. Ihre Koeffizienten sind gerade die Eigenwerte $-\ell(\ell+1)$ der entsprechenden Unterräume. Machen Sie Sich die Dimensionsverhältnisse klar.

Aufgabe 2

In der Vorlesung wurde die Jacobi-Gleichung in der Form

$$\nabla_u\nabla_u n = R(u,n)u \tag{5}$$

bewiesen, wobei u das normierte Tangentialvektorfeld entlang der Geodätischen ist und n das dazu orthogonale Vektorfeld, das sie mit einer infinitesimal benachbarten Geodätischen 'verbindet'. Der Krümmungstensor ist wie in der Vorlesung definiert durch

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z\,. \tag{6}$$

Zeigen Sie, dass für jedes fest gewählte Paar (X,Y) von Vektoren die „Krümmungsabbildung“ $Z\mapsto R(X,Y)Z$ bezüglich der Metrik g antisymmetrisch ist. Zu welcher Symmetrieeigenschaft des Krümmungstensors korrespondiert diese Aussage? Nehmen Sie nun die in der Vorlesung angegebenen Symmetrieeigenschaften des Krümmungstensors an und zeigen Sie damit, dass für jedes gegebene X die „Jacobi-Abbildung“

$$Y\mapsto R(X,Y)X \tag{7}$$

symmetrisch bezüglich g ist und X im Kern hat. Was bedeutet das für den in (5) vorliegenden Fall, in dem $X = u$ zeitartig ist, für die Diagonalisierbarkeit der Jacobi-Abbildung?

Benutzen Sie die in der Vorlesung angegebene Zerlegung des Riemann-Tensors in den Weyl-Tensor und weitere, nur vom Ricci-Tensor abhängige Anteile, sowie die Einstein-Gleichungen, um die rechte Seite von (5) durch den Weyl-Tensor und den Energie-Impuls-Tensor auszudrücken.