Übungen zur Vorlesung

Theorie der Gravitationswellen

von DOMENICO GIULINI

Blatt 3

Aufgabe 1

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass für die linearisierten Einsteingleichungen stets eine Eichung gefunden werden kann (TT-Eichung), so dass die Feldkomponenten $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$ folgenden Gleichungen genügen ($\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$; $a, b \in \{1, 2, 3\}$):

$$h_{0\mu} = 0\,, \tag{1a}$$
$$h_{aa} = 0\,, \tag{1b}$$
$$\partial_a h_{ab} = 0\,. \tag{1c}$$

Zeigen Sie direkt aus der Definitionsgleichung des Riemann-Tensors: Gilt (1a), so besteht zwischen den zweiten zeitlichen Ableitungen von h_{ab} und den Komponenten des Krümmungstensors (in linearer Näherung) folgende Beziehung:

$$\partial_0^2 h_{ab} = -2\, R_{0a0b}\,. \tag{2}$$

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass in der TT-Eichung ein anfänglich ruhendes Testteilchen gemäß der Geodätengleichung in Ruhe bleibt. Wenden Sie nun die Jacobi-Gleichung

$$\nabla_u \nabla_u n = R(u, n)u \tag{3}$$

auf zwei benachbarte Geodätische solch „ruhender“ Teichen an und zeigen Sie mit Hilfe von (2), dass die Jacobi-Abbildung (vgl. Übungsblatt 2 Aufgabe 2) in Komponenten gegeben ist durch

$$n^a \mapsto -\tfrac{1}{2}\, \ddot{h}_{ab}\, n^b\,, \tag{4}$$

wobei ein Punkt die Ableitung nach der Koordinatenzeit $t = x^0/c$ bezeichnet. Achtung auf Vorzeichen: Da wir $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$ definiert haben und die Lorentzmetrik konventionell mit Signatur $(+, -, -, -)$ annehmen, entspricht ein positives/negatives Diagonalelement h_{aa} (keine Summation über a) einer Abnahme/Zunahme des metrischen Abstandes zweier Punkte gleichen a-Koordinatenabstands relativ zum Minkowskiabstand.

Aufgabe 2

Sei $y \in M^4$ ein fester Punkt des Minkowskiraumes und

$$\mathcal{L}_y^- := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x^0 \le y^0,\ (x-y)^2 = 0\} \tag{5}$$

der Vergangenheitslichtkegel mit Spitze in y. (Wir schreiben x^2 für $\eta(x,x)$ etc.) Zeigen Sie, dass die Gruppe der eigentlichen orthochronen Lorentztransformationen mit Zentrum y transitiv auf $\mathcal{L}_y^-$ operiert. [Tipp: Das kann man argumentieren ohne zu Rechnen.] Zeigen Sie weiter, dass

$$d\mu_y(x) = \Theta(y^0 - x^0)\, \delta\big((x-y)^2\big)\, d^4x \tag{6}$$

ein unter dieser Gruppenaktion invariantes Maß auf $\mathcal{L}_y^-$ definiert, und dass die retardierte Lösung der Gleichung

$$\Box F = \Sigma \tag{7}$$

gegeben ist durch

$$F(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{L}_y^-} d\mu_y(x)\, \Sigma(x)\,. \tag{8}$$

Aufgabe 3

Ein Spezialfall von (8) ist die Liénard-Wiechert'sche Lösung für das Vektorpotential einer Punktladung e, die sich entlang der Weltlinie $z^\mu(\tau)$ (τ ist die Eigenzeit) im Minkowskiraum bewegt. Das Vektorpotential genügt $\Box A^\mu = (4\pi/c) j^\mu$, wobei die Stromdichte durch folgende *Distribution* gegeben ist:

$$j^\mu(x) = e \int d\tau\, \dot{z}^\mu(\tau)\, \delta^{(4)}\big(x - z(\tau)\big)\,. \tag{9}$$

Für diese gilt $\partial_\mu j^\mu = 0$; beweisen Sie das.

Leiten Sie mit Hilfe von (8) und (6) nun ab, dass (wir schreiben $x \cdot y := \eta(x,y)$ etc.)

$$A^\mu(x) = \frac{e}{c}\, \frac{\dot{z}^\mu(\tau_{ret}(x))}{\dot{z}^\mu(\tau_{ret}(x)) \cdot \big(x - z(\tau_{ret}(x))\big)}\,, \tag{10}$$

wobei die Funktion $\tau_{ret} : M \to \mathbb{R}$ jedem Raumzeitpunkt x die Eigenzeit zuordnet, die dem Schnittpunkt des Vergangenheitslichtkegels $\mathcal{L}_x^-$ mit der Teilchenweltline entspricht. Machen Sie Sich klar, dass dieser Schnittpunkt - sofern existent - eindeutig ist. Er existiert, wenn man voraussetzt, dass die Teilchenbeschleunigung für $\tau \to -\infty$ verschwindet. Interpretieren Sie die Funktion $r(x) := \dot{z}^\mu(\tau_{ret}(x)) \cdot (x - z(\tau_{ret}(x)))$ als „gleichzeitigen räumlichen Abstand“ im Inertialsystem, im dem das Teilchen zum Zeitpunkt $\tau_{ret}(x)$ ruht. Zeigen Sie

$$\partial_\mu \tau_{ret}(x) = \frac{x_\mu - z_\mu(\tau_{ret}(x))}{r(x)}\,, \quad \dot{z}^\mu(\tau_{ret}(x)) \partial_\mu r(x) = \ddot{z}(\tau_{ret}(x)) \cdot \big(x - z(\tau_{ret}(x))\big) \tag{11}$$

und zeigen Sie damit durch Nachrechnen, dass (10) tatsächlich der Eichbedingung

$$\partial_\mu A^\mu(x) = 0 \tag{12}$$

genügt.