Übungen zur Vorlesung

Theorie der Gravitationswellen

von Domenico Giulini

Blatt 4

Aufgabe 1

In der Vorlesung wurden die linearisierten Einsteingleichungen für $h_{\mu\nu} := g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$ in folgender Form abgeleitet (es ist $h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$:

$$\Box h_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu h - \partial_\mu \partial^\alpha h_{\alpha\nu} - \partial_\nu \partial^\alpha h_{\alpha\mu} = -\frac{16\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} \eta_{\mu\nu} T \right). \tag{1}$$

Überzeugen Sie sich, dass diese äquivalent sind zu

$$\begin{aligned} D^{\alpha\beta}_{\mu\nu} h_{\alpha\beta} : &= \Box h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \Box h \\ &+ \partial_\mu \partial_\nu h + \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta h_{\alpha\beta} \\ &- \partial_\mu \partial^\alpha h_{\alpha\nu} - \partial_\nu \partial^\alpha h_{\alpha\mu} \\ &= -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} . \end{aligned} \tag{2}$$

Beweisen Sie, dass der Differentialoperator $D^{\alpha\beta}_{\mu\nu}$ formal symmetrisch ist, d.h. für alle Tensorfelder $h_{\mu\nu}$ und $k_{\mu\nu}$, von denen mindestens eines seinen Träger innerhalb $\Omega \subset \mathbb{R}^4$ hat, gilt:

$$\int_\Omega d^4x \, k^{\mu\nu} D^{\alpha\beta}_{\mu\nu} h_{\alpha\beta} = \int_\Omega d^4x \, h^{\mu\nu} D^{\alpha\beta}_{\mu\nu} k_{\alpha\beta} . \tag{3}$$

Zeigen Sie nun weiter, dass (2) die Euler-Lagrange-Gleichungen (vgl. Vorlesung) zu folgender Wirkung sind:

$$\begin{aligned} S(\Omega, h) = \frac{c^4}{32\pi G} \int_\Omega dt \, d^3x \Big\{ & \tfrac{1}{2} \Big[(\partial_\mu h_{\alpha\beta})(\partial^\mu h^{\alpha\beta}) - (\partial_\alpha h)(\partial^\alpha h) \\ & + 2(\partial_\alpha h)(\partial_\mu h^{\mu\alpha}) - 2(\partial_\alpha h^{\alpha\mu})(\partial^\beta h_{\beta\mu}) \Big] - \frac{16\pi G}{c^4} h^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \Big\} . \end{aligned} \tag{4}$$

Machen Sie sich die Korrektheit der physikalischen Dimensionen und des numerischen Vorfaktors klar, letzteres z.B. anhand der Tatsache, dass die Wechselwirkungsenergiedichte $\frac{1}{2} h^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$ im Newtonschen Grenzwert wegen $h_{00} = 2\phi/c^2$ ($\phi =$ Newton'sches Gravitationspotential) korrekterweise gerade in $\rho\phi$ übergeht, wobei $\rho := T_{00}/c^2$ die Massendichte ist. (Bis auf diesen, aus physikalischen Erwägungen zu bestimmenden Vorfaktor ist die Lagrangedichte im Wesentlichen eindeutig. Siehe dazu die in den Ergänzungen angehängte Arbeit von Wyss (1965).)

Aufgabe 2

Der Energie-Impulstensor der durch (4) gegebenen, Poincaré-invarianten Theorie ist gegeben durch (L ist der Integrand von (4) mit Vorfaktor $c^4/32\pi G$)

$$t^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu h_{\alpha\beta})}\,(\partial_\nu h_{\alpha\beta}) - \delta^{\mu}_{\nu} L \tag{5}$$

Berechnen Sie diesen aus (4) und zeigen Sie, dass er für $T_{\mu\nu} = 0$ in der De Donder–Eichung $\partial^\mu(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h) = 0$ gegeben ist durch

$$\begin{aligned} t_{\mu\nu} = \frac{c^4}{32\pi G}\Big\{ &(\partial_\mu h_{\alpha\beta})(\partial_\nu h^{\alpha\beta}) - \tfrac{1}{2}(\partial_\mu h)(\partial_\nu h) \\ &- \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\Big[(\partial_\lambda h_{\alpha\beta})(\partial^\lambda h^{\alpha\beta}) - (\partial_\lambda h)(\partial^\lambda h)\Big]\Big\} \end{aligned} \tag{6}$$

Bezeichnet man mit $\langle\cdots\rangle$ eine Mittelung über ein Gebiet der Raumzeit mit der Längenausdehnung L, das groß gegenüber den betrachteten Gravitationswellenlängen λ ist, so kann man innerhalb $\langle\cdots\rangle$ partiell integrieren und die Randterme vernachlässigen, da diese mit λ/L unterdrückte Beiträge liefern. Beweisen Sie mit Hilfe der Feldgleichungen $\Box h_{\mu\nu} = 0$, dass die Mittelung von (6) dann liefert:

$$\big\langle t_{\mu\nu}\big\rangle = \frac{c^4}{32\pi G}\Big\langle(\partial_\mu h_{\alpha\beta})(\partial_\nu h^{\alpha\beta}) - \tfrac{1}{2}(\partial_\mu h)(\partial_\nu h)\Big\rangle\,. \tag{7}$$

Wenden Sie nun (7) auf eine ebene Welle an (kk = komplex konjugiertes)

$$h_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta}\,\exp(-ik_\mu x^\mu) + \mathrm{kk} \tag{8}$$

und zeigen Sie, dass dann

$$\big\langle t_{\mu\nu}\big\rangle = \frac{c^4}{16\pi G}\,k_\mu k_\nu\Big(A_{\alpha\beta}\bar{A}^{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}|A^{\alpha}_{\alpha}|^2\Big)\,. \tag{9}$$

Weisen Sie schließlich nach, dass in der TT-Eichung gilt

$$A_{\alpha\beta}\bar{A}^{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}|A^{\alpha}_{\alpha}|^2 = 2\big(|A_+|^2 + |A_\times|^2\big)\,. \tag{10}$$

Aufgabe 3

Beweisen Sie folgendes Resultat: Auf einer Mannigfaltigkeit mit Metrik (nicht notwendig positiv definit) gehorchen lokal definierte Koordinatenfunktionen $x^\mu : M \subseteq U \to \mathbb{R}$ der Gleichung

$$\Box_g x^\mu := g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta\, x^\mu = 0 \tag{11}$$

genau dann, wenn die Komponenten der Metrik bezüglich *dieses* Koordinatensystems die Gleichung erfüllen

$$g^{\alpha\beta}\,\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = 0\,, \tag{12a}$$

was wiederum äquivalent ist zu

$$\partial_\lambda\Big(\sqrt{|\det\{g_{\alpha\beta}\}|}\; g^{\lambda\mu}\Big) = 0\,. \tag{12b}$$

Man nennt solche Koordinaten *harmonisch*.

Zeigen Sie weiter: Ist $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, so ist die linke Seite von (12) in linearer Näherung in $h_{\mu\nu}$ gleich:

$$-\partial_\lambda\big(h^{\lambda\mu} - \tfrac{1}{2}\eta^{\lambda\mu}h\big)\,, \tag{13}$$

wobei $h^{\lambda\mu} := \eta^{\lambda\alpha}\eta^{\mu\beta}h_{\alpha\beta}$ und $h := \eta^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}$. Die De Donder'sche Eichbedingung ist also die linearisierte Version der harmonischen Eichung (11).