Übungen zur Vorlesung

Theorie der Gravitationswellen

von DOMENICO GIULINI

Blatt 5

Aufgabe 1

Betrachten Sie in Newton'scher Näherung den freien radialen Fall einer Punktmasse m auf einen Zentralkörper der Masse $M \gg m$ mit sphärisch-symmetrischer Massenverteilung und Radius R. Berechnen Sie nach der Quadrupolformel die Strahlungsleistung und zeigen Sie, dass die gesamte, während eines freien Falls von $r = \infty$ (mit verschwindender Anfangsgeschwindigkeit) nach $r = R$ abgestrahlte Energie gegeben ist durch

$$\Delta E = mc^2 \left(\frac{2}{105}\right)\left(\frac{m}{M}\right)\left(\frac{2GM}{c^2R}\right)^{7/2} . \tag{1}$$

(Argumentieren Sie zuerst, dass man für $M \gg m$ die Bewegung der Zentralmasse vernachlässigen kann.) Was erhält man daraus als Abschätzung für den freien Fall in ein Schwarzes Loch? Welche der für die Ableitung von (1) gemachten Annahmen treffen hier offensichtlich nicht mehr zu?

Aufgabe 2

Betrachten Sie einen Balken der Länge L mit kreisförmigen Querschnitt der Fläche q, wobei die Längsdimension groß gegen die Querdimension sei: $L \gg \sqrt{q}$. Die Masenverteilung im Balken sei homogen von konstanter Dichte ρ. Der Balken rotiere mit Kreisfrequenz ω um eine zur Längsachse senkrechte Achse durch den Mittelpunkt. Berechnen Sie die maximale Zugspannung σ_{max} im Balken unter den Annahme, dass sich der Balken weder verformt noch dehnt. Wo tritt diese auf? Sei nun σ_z die Zerreißspannung des Balkenmaterials. Zeigen Sie, dass die Bedingung $\sigma_{\text{max}} < \sigma_z$ eine obere Schranke an die Gravitationswellenleistung (hier ist I = Trägheitsmoment um die Rotationsachse im körperfesten System)

$$L_{\text{GW}} = \frac{32}{5}\frac{G}{c^5} I^2\omega^6 \tag{2}$$

impliziert von

$$L_{\text{GW}}^{\text{max}} = \frac{1024}{45}\frac{G}{c^5}\frac{q^2\sigma_{\text{max}}^3}{\rho} . \tag{3}$$

Beachten Sie, dass ρ im Nenner steht! Welches Ihnen bekannte Material hätte also an seiner Belastungsgrenze die höchste Ausbeute an Gravitationswellen, und wie hoch wäre diese?

Aufgabe 3

Zwei gleiche, mit einer Feder gekoppelte Punktmassen m schwingen entlang der z-Achse is symmetrischer Weise gemäß

$$z_{\pm}(t) = \pm\big(a + \epsilon\ \cos(\omega t)\big)\,. \tag{4}$$

Hierbei sei die Amplitude ϵ sehr klein gegenüber dem relativen Abstand $2a$ der beider Ruhelagen, so dass Sie im Folgenden nur in führender Ordnung in ϵ/a rechnen müssen. In der Vorlesung wurde folgender Ausdruck für die radiale Komponente der zeitgemittelten Energiestromdichte hergeleitet:

$$S = \frac{G}{8\pi c^5}\,\frac{1}{r^2}\left\langle \dddot{Q}^{TT}_{ab}\dddot{Q}^{TT}_{ab}\right\rangle. \tag{5}$$

Hier bezeichnet $\langle\cdots\rangle$ die Zeitmittelung und TT die Projektion auf die transversal-spurlosen Anteile gemäß

$$Q^{TT}_{ab} = P_{ac}P_{bd}Q_{cd} - \tfrac{1}{2}P_{ab}P_{cd}Q_{cd}\,, \tag{6}$$

wobei

$$P_{ab} = \delta_{ab} - n_a n_b \quad \text{mit} \quad n_a := x_a/r\,. \tag{7}$$

Setzen Sie $n_a = (\sin\theta\ \cos\varphi\ ,\ \sin\theta\ \sin\varphi\ ,\ \cos\theta)$ und berechnen Sie die Abhängigkeit der radialen Energiestromdichte S vom Polarwinkel θ. (Aus Symmetriegründen ist klar, dass die Abhängigkeit vom Azimut φ trivial ist.) Vergleichen Sie das Resultat mit dem Entsprechenden für elektrische Dipol- und Quadrupolstrahlung. Was fällt Ihnen auf?