which can be written as:

$$M_{if} = \frac{\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ \varepsilon\end{pmatrix}\otimes\varphi_f^{(e)},\ S^{(e)}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ \varepsilon\end{pmatrix}\otimes\varphi_i^{(e)}\right)}{\left\|\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ \varepsilon\end{pmatrix}\varphi_f^{(e)}\right\|\left\|\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ \varepsilon\end{pmatrix}\varphi_i^{(e)}\right\|} = \frac{(\varphi_f^{(e)}\, s\, \varphi_i^{(e)})}{\|\varphi_f^{(e)}\|\,\|\varphi_i^{(e)}\|}$$

$$= \left[(\varphi_f\, s\, \varphi_i) + \varepsilon\,(P\,\varphi_f\, s\, \varphi_i) + \varepsilon\,(\varphi_f\, s\, P\,\varphi_i) + (P\,\varphi_f\, s\, P\,\varphi_i)\right]\frac{1}{\|\varphi_f^{(e)}\|\,\|\varphi_i^{(e)}\|}\,,$$

or:

$$M_{if} = \frac{(\varphi_f\, s\, \varphi_i) + \varepsilon\,(P\,\varphi_f\, s\, \varphi_i)}{\|\varphi_f\|\,\|\varphi_i\|}\,. \tag{3.24}$$

The last Equation (3.24) holds for the case where the free particle p and the bound state p 3 are infinitely far away from each other such that

$$(\varphi_f\, P\,\varphi_f) = 0\,.$$

P is, as usual, the permutation operator of particles 1 and 2, and the diagonal element of the operator S in $V^{(2)}$. (3.24) shows that the transition matrix element is a sum of a 'direct' term (1st summand) and an 'exchange' term (2nd summand) in full agreement with the prescription by MOTT and MASSEY[1]). The cross-section is again proportional to

$$\sigma_{if} \sim |M_{if}|^2\,.$$

Literature

1) MOTT and MASSEY, *The Theory of Atomic Collisions* (2nd ed.) Oxford (1949).
2) J. M. JAUCH, Helv. Phys. Acta *31*, 127 (1958).
3) J. M. JAUCH, Helv. Phys. Acta *31*, 661 (1958).
4) BRENIG and HAAG, Fortschr. d. Phys. *7* (1959).
5) J. M. COOK, Journ. of Math. and Phys. *36*, 81 (1957).
6) M. N. HACK, Il Nuovo Cim. *13*, 231 (1959).
7) E. CORINALDESI, Il Nuovo Cim. *24*, 92 (1962).

Zur Unizität der Gravitationstheorie

von **Walter Wyss**
Seminar für Theoretische Physik der ETH, Zürich

(23. V. 65)

Abstract. A linearized lorentzcovariant theory of gravitation leads, when coupled to the energy-momentum tensor of a model of matter, directly to the Einstein gravitation theory. This rests on the existence of an unique extension of the linear gaugegroup to the general covariance-pseudogroup of the Minkowskispace.

1. Einleitung

Man möchte mit den Methoden der klassischen lorentzkovarianten Feldtheorien eine Theorie der Gravitation aufstellen[1])[2]), etwa nach dem Muster der Elektrodynamik. Dazu bedienen wir uns des Lagrangeschen Formalismus. Dieser garantiert nämlich die Gültigkeit von Actio = Reactio, also die Rückwirkung der Gravitation auf die Materie. Aus den empirisch bekannten Eigenschaften dieser Wechselwirkung lässt sich nun das Transformationsverhalten des Gravitationsfeldes bestimmen, das heisst zu welcher Darstellung $[m, s]$ der Überlagerungsgruppe der inhomogenen Lorentzgruppe es gehört. Zum vornherein kann man den Fall des halbganzen Spins ausschliessen, da ja das Gravitationsfeld direkt beobachtbar ist. Ferner muss unsere Theorie als Grenzfall die Newtonsche Gravitationstheorie enthalten, denn diese kann gewisse Gravitationsphänomene mit hoher Genauigkeit erklären. Dies bedeutet aber schon, dass das Gravitationsfeld neutral ist und zur Ruhemasse Null gehört. Die entsprechenden einfachsten Fälle, der des Spins $s = 0$ und $s = 1$, geben jedoch keine richtige Beschreibung der Gravitation. Dem Fall $[0, 0]$ entspricht die Nordströmsche Theorie; diese liefert aber keine Lichtablenkung am Sonnenrand. Das Feld $[0, 1]$ ist uns bekannt als dasjenige der Elektrodynamik. Das Gravitationsfeld weist aber nur anziehende Kräfte auf, wogegen die Elektrodynamik solche beiderlei Vorzeichens liefert. Es bleiben also noch die Felder $[0, s]$, $s \geqq 2$ als Aspiranten für das Gravitationsfeld übrig. Nun liefert aber das Äquivalenzprinzip einen weiteren Hinweis. Das Erfahrungsgesetz von der Gleichheit der trägen und schweren Masse zeigt, dass der Energie-Impuls-Tensor der Materie als Quelle des Gravitationsfeldes anzusehen ist. Verlangt man deshalb, dass für die Erzeugung eines Gravitationsfeldes durch ein materielles System allein dessen Energie-Impuls-Tensor $T_{\mu\nu}$ massgebend ist, so muss unser Feld zur Darstellung $[0, 2]$ gehören. Der Symmetrie von $T_{\mu\nu}$ wegen können wir das Gravitationsfeld $\psi_{\mu\nu}(x)$, $x \in M$ (Minkowskiraum), oder kurz ψ, ebenfalls als symmetrisch annehmen.

Wir beginnen nun mit einer linearen freien Theorie für das ψ-Feld. Da bekanntlich[3]) jedem freien Feld zur Ruhemasse $m = 0$ eine Eichgruppe zugeordnet ist, so besitzt speziell unser ψ-Feld eine solche. Wir bezeichnen sie mit $E(\xi)$; ξ sind dabei Vektorfelder über M. Diese Eichgruppe liefert nach dem Noether-Hilbertschen Theorem[4]) eine Identität in den ψ-Bewegungsgleichungen.

Koppelt man, gemäss unserer Forderung, das ψ-Feld direkt an den Energie-Impuls-Tensor $T_{\mu\nu}$ eines Materiemodells, so führt die erwähnte Identität auf eine Inkonsistenz. Die Idee dieser Arbeit ist nun, die Bewegungsgleichungen als Anfang einer Entwicklung aufzufassen, bezüglich welcher diese Inkonsistenz von höherer Ordnung ist. Will man die Bewegungsgleichungen so modifizieren, dass sie eine Ordnung höher konsistent bleiben, so ist man gezwungen, nichtlineare Terme in ψ einzuführen und unsere Identität zu modifizieren. Diese Modifikation ist eindeutig und führt, nach dem Noether-Hilbertschen Theorem, auf eine Erweiterung $\boldsymbol{E}(\xi)$ der Eichgruppe $E(\xi)$. $\boldsymbol{E}(\xi)$ erweist sich als isomorph zur Kovarianzpseudogruppe $K(M)$ des Minkowskiraumes. Identifiziert man diese beiden Gruppen, so ist unsere Theorie die Einsteinsche Gravitationstheorie mit $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \psi_{\mu\nu}$.

Ich danke meinen verehrten Lehrern Prof. M. Fierz und Prof. R. Jost für die freundliche Unterstützung während der Ausführung dieser Arbeit.

2. Das freie Gravitationsfeld

Wir beschreiben das Gravitationsfeld durch ein symmetrisches Tensorfeld ψ. Da dieses Feld weiter nicht eingeschränkt wird, transformiert es sich nach der reduziblen Darstellung

$$D = 2[0, 0] \oplus [0, 1] \oplus [0, 2]$$

der inhomogenen Lorentzgruppe $P_+^\uparrow$. Die zu ψ gehörende Eichgruppe $E(\xi)$ besteht deshalb aus den Transformationen

$$T(\xi)\, \psi_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} + \xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu}\,, \tag{2.1}$$

wobei ξ ein beliebiges Vektorfeld ist. $E(\xi)$ ist also eine Abelsche Gruppe.

Die Absicht, eine lineare freie Gravitationstheorie aufzustellen, deren Feldgleichungen höchstens zweite Ableitungen der Felder enthalten, führt uns auf eine Lagrangefunktion $L(\psi)$, die aus bilinearen Ausdrücken im Feld und dessen ersten Ableitungen $\psi_{\mu\nu\sigma} \equiv \partial_\sigma \psi_{\mu\nu}$ aufgebaut ist. Der allgemeinste Ansatz für $L(\psi)$ setzt sich aus folgenden linear unabhängigen lorentzinvarianten Ausdrücken zusammen:

$$\begin{aligned} I_1 &= \psi^\mu{}_\mu \psi^\nu{}_\nu & I_3 &= \psi_{\mu\nu\sigma}\psi^{\mu\nu\sigma} & I_5 &= \psi^\mu{}_{\mu\sigma}\psi^{\nu\sigma}{}_\nu & I_7 &= \psi^{\mu\sigma}{}_\mu \psi^\nu{}_{\sigma\nu} \\ I_2 &= \psi^{\mu\nu}\psi_{\mu\nu} & I_4 &= \psi_{\mu\nu\sigma}\psi^{\mu\sigma\nu} & I_6 &= \psi^\mu{}_{\mu\sigma}\psi^{\nu\sigma}{}_\nu \end{aligned} \tag{2.2}$$

Das Herauf- und Herunterziehen der Indizes geschieht immer mit dem Minkowskitensor, den wir mit $\eta_{\mu\nu}$ und dessen Inverses mit $\eta^{\mu\nu}$ bezeichnen.

Man bemerkt nun aber, dass die Invarianten I_4 und I_7 lagrangeabhängig sind, das heisst sie unterscheiden sich nur um eine Divergenz

$$\psi_{\mu\nu\sigma}\psi^{\mu\sigma\nu} = \psi^{\mu\sigma}{}_\mu \psi^\nu{}_{\sigma\nu} + \partial_\sigma\left[\psi_{\mu\nu}\psi^{\mu\sigma\nu} - \psi_\mu{}^\sigma \psi^{\mu\nu}{}_\nu\right].$$

Wir brauchen deshalb nur die ersten sechs Invarianten zu berücksichtigen.

$$L(\psi) = \sum_{i=1}^{6} A_i I_i \tag{2.3}$$

ist daher der allgemeinste Ansatz für die Lagrangefunktion des linearen Gravitationsfeldes.

Die zum Variationsprinzip $\delta \int L(\psi)\, dx = 0$ gehörige Eulersche Ableitung

$$\varepsilon(\psi_{\alpha\beta})\, L \equiv \left[\frac{\partial}{\partial\psi_{\alpha\beta}} - \partial_\sigma \frac{\partial}{\partial\psi_{\alpha\beta\sigma}}\right] L$$

bezeichnen wir mit $-G^{\alpha\beta}(\psi)$. Die Bewegungsgleichung lautet:

$$G^{\alpha\beta}(\psi) = 0\,. \tag{2.4}$$

Man findet

$$\begin{aligned} -G^{\alpha\beta} - 2A_1 \eta^{\alpha\beta}\psi^\mu{}_\mu &+ 2A_2\psi^{\alpha\beta} \\ &- 2A_3\psi^{\alpha\beta\sigma}{}_\sigma - A_4\psi^{\alpha\sigma\beta}{}_\sigma - A_4\psi^{\beta\sigma\alpha}{}_\sigma \\ &- 2A_5\eta^{\alpha\beta}\psi^\mu{}_\mu{}^\nu{}_\nu - A_6\eta^{\alpha\beta}\psi^{\nu\sigma}{}_{\nu\sigma} \\ &- A_6\psi^\mu{}_\mu{}^{\alpha\beta}\,. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Die Invarianz bezüglich $E(\xi)$ verlangt

$$G^{\alpha\beta}(\psi) = G^{\alpha\beta}(T(\xi)\,\psi)\,, \tag{2.6}$$

oder eingesetzt

$$\begin{aligned} &-4A_1\eta^{\alpha\beta}\xi^\mu{}_\mu - 2A_2(\xi^{\alpha\beta} + \xi^{\beta\alpha}) + 2A_3(\xi^{\alpha\beta\sigma}{}_\sigma + \xi^{\beta\alpha\sigma}{}_\sigma) \\ &+ A_4(\xi^{\alpha\sigma\beta}{}_\sigma + \xi^{\beta\sigma\alpha}{}_\sigma) + A_4(\xi^{\beta\sigma\alpha}{}_\sigma + \xi^{\sigma\beta\alpha}{}_\sigma) \\ &+ 4A_5\eta^{\alpha\beta}\xi^{\nu\sigma}{}_{\nu\sigma} + A_6\eta^{\alpha\beta}(\xi^{\nu\sigma}{}_{\nu\sigma} + \xi^{\sigma\nu}{}_{\nu\sigma}) \\ &+ 2A_6\xi^\mu{}_\mu{}^{\alpha\beta} \equiv 0\,. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert das bestimmende Gleichungssystem für die Koeffizienten A_i:

$$\begin{aligned} A_1 = A_2 &= 0\,, \\ 2A_3 + A_4 &= 0\,, \\ A_4 + A_6 &= 0\,, \\ 2A_5 + A_6 &= 0\,. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Da in der Lagrangefunktion (2.3) ein gemeinsamer Faktor unwesentlich ist, so kann man einen Koeffizienten willkürlich vorgeben, etwa

$$A_3 = \frac{1}{4}\,. \tag{2.9}$$

Damit folgt

$$A_4 = -\frac{1}{2} \qquad A_5 = -\frac{1}{4} \qquad A_6 = \frac{1}{2} \tag{2.10}$$

und somit (2.5)

$$G^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left[\psi^{\alpha\beta\sigma}{}_{\sigma} + \psi^{\mu}{}_{\mu}{}^{\alpha\beta} - \psi^{\alpha\sigma\beta}{}_{\sigma} - \psi^{\beta\sigma\alpha}{}_{\sigma} + \eta^{\alpha\beta}\{\psi^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} - \psi^{\mu}{}_{\mu}{}^{\nu}{}_{\nu}\}\right], \tag{2.11}$$

sowie (2.3)

$$L(\psi) = \frac{1}{4}\psi_{\mu\nu\sigma}\psi^{\mu\nu\sigma} - \frac{1}{2}\psi_{\mu\nu\sigma}\psi^{\mu\sigma\nu} - \frac{1}{4}\psi^{\mu}{}_{\mu\sigma}\psi^{\nu}{}_{\nu}{}^{\sigma} + \frac{1}{2}\psi^{\mu}{}_{\mu\sigma}\psi^{\nu\sigma}{}_{\nu}. \tag{2.12}$$

Nach dem Noether-Hilbertschen Theorem entspricht der Eichgruppe $E(\xi)$ eine Identität in den Bewegungsgleichungen.

Es sei nämlich

$$\delta \int L(\psi)\,dx = \int \varepsilon(\psi_{\alpha\beta})\,L(\psi)\,\delta\psi_{\alpha\beta} = 0$$

und

$$\delta\psi_{\alpha\beta} = \xi_{\alpha\beta} + \xi_{\beta\alpha}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} -\int G^{\alpha\beta}(\xi_{\alpha\beta} + \xi_{\beta\alpha})\,dx &= -2\int G^{\alpha\beta}\,\xi_{\alpha\beta}\,dx \\ &= -2\int \partial_\beta(G^{\alpha\beta}\,\xi_\alpha)\,dx \\ &\quad + 2\int G^{\alpha\beta}{}_{\beta}\,\xi_\alpha\,dx \end{aligned}$$

oder, da ξ beliebig,

$$G^{\alpha\beta}{}_{\beta} \equiv 0. \tag{2.13}$$

Es ist nun bemerkenswert, dass auf Grund der Bewegungsgleichungen (2.4) (2.11)

$$G^{\alpha\beta}(\psi) = 0 \tag{2.14}$$

und einer speziellen Eichung (die sog. Hilberteichung)

$$\overline{\psi} = T(\xi)\,\psi$$

irreduzibel ist, das heisst nach [0, 2] transformiert.

Dies ist der Fall, wenn

$$\overline{\psi}^{\mu}{}_{\mu} = \overline{\psi}^{\mu\nu}{}_{\mu} = 0. \tag{2.15}$$

Dazu muss ξ die Differentialgleichungen

$$\xi^{\mu}{}_{\mu} = -\frac{1}{2}\psi^{\mu}{}_{\mu} \tag{2.16}$$

$$\xi^{\mu\nu}{}_{\nu} = -\psi^{\mu\nu}{}_{\nu} + \frac{1}{2}\psi^{\nu}{}_{\nu}{}^{\mu} \tag{2.17}$$

erfüllen. Durch Spurbildung in (2.14) erhält man zusätzlich

$$-\psi^{\mu}{}_{\mu}{}^{\nu}{}_{\nu} + \psi^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} = 0,$$

$\partial_\mu(2.17) = \Box(2.16)$

das heisst die Gleichungen (2.16) (2.17) sind verträglich.

Wir schliessen diesen Abschnitt mit der zusammenfassenden Bemerkung, dass im Lagrangeformalismus die Eichgruppe $E(\xi)$ eindeutig eine lineare Theorie bestimmt. In der Hilberteichung transformiert sich das Feld sogar irreduzibel, und zwar nach der Darstellung [0, 2] der Gruppe $P_+^{\uparrow}$.

3. Ankoppelung an ein Materiemodell

Der folgenden Untersuchung liegt das skalare Klein-Gordonfeld ohne Selbstkopplung zur Masse m als Materiemodell zugrunde. Die zugehörige Lagrangefunktion lautet

$$L(\phi) = \phi_\mu\,\phi^\mu - m^2\,\phi^2. \tag{3.1}$$

Aus dem Variationsprinzip

$$\delta \int L(\phi)\,dx = 0$$

folgt die Eulersche Gleichung

$$\varepsilon(\phi)\,L(\phi) = -2\,K(\phi) = 0 \tag{3.2}$$

mit

$$\varepsilon(\phi) \equiv \frac{\partial}{\partial\Phi} - \partial_\sigma\,\frac{\partial}{\partial\Phi_\sigma}$$

und

$$K(\phi) = (\partial_\mu\,\partial^\mu + m^2)\,\phi. \tag{3.3}$$

Für den kanonischen Energie-Impuls-Tensor

$$T^{\alpha}{}_{\beta}(\phi) \equiv \frac{\partial L(\Phi)}{\partial\,\Phi_\alpha}\,\phi_\beta - \delta^{\alpha}{}_{\beta}\,L(\phi) \tag{3.4}$$

findet man

$$T^{\alpha}{}_{\beta}(\phi) = 2\,\phi^\alpha\,\phi_\beta - \delta^{\alpha}{}_{\beta}\,(\phi_\mu\,\phi^\mu - m^2\,\phi^2)$$

oder

$$T^{\alpha\beta}(\phi) = 2\,\phi^\alpha\,\phi^\beta - \eta^{\alpha\beta}\,(\phi_\mu\,\phi^\mu - m^2\,\phi^2). \tag{3.5}$$

Dieser Tensor ist symmetrisch und hat die Eigenschaft

$$T^{\alpha\beta}\,(\phi)_\alpha = 2\,K(\phi)\,\phi^\beta. \tag{3.6}$$

Wir koppeln nun unser lineares Gravitationsfeld an das obige Materialmodell, und zwar, wie in der Einleitung gefordert, mittels des Energie-Impuls-Tensors (3.5). Die Lagrangefunktion im Variationsprinzip

$$\delta \int L(\psi, \phi)\,dx = 0$$

hat dann die Struktur

$$L(\psi, \phi) = L(\psi) + L(\phi) + W(\psi, \phi). \tag{3.7}$$

Dabei sind $L(\psi)$ und $L(\phi)$ durch (2.12) und (3.1) gegeben. $W(\psi, \phi)$ ist eine lorentzinvariante Grösse und muss die Bedingung

$$\varepsilon(\psi_{\alpha\beta})\,W(\psi, \phi) = -\frac{1}{2}\,T^{\alpha\beta}(\phi) \tag{3.8}$$

erfüllen. Die Kopplungskonstante ist dabei speziell normiert.

Um den allgemeinsten Ansatz für $W(\psi, \phi)$, der der Bedingung (3.8) genügt, zu bestimmen, bedenke man, dass in (3.7) nur die Felder und deren erste Ableitungen auftreten dürfen und dass $T^{\alpha\beta}(\phi)$ kein ψ und keine zweiten Ableitungen von ϕ enthält. Wir verbleiben deshalb mit

$$W(\psi, \phi) = B_1 \psi^\mu{}_\mu \phi^2 + B_2 \psi^\mu{}_\mu \phi^\nu \phi_\nu + B_3 \phi_\mu \psi^{\mu\nu} \phi_\nu . \tag{3.9}$$

Die Bedingung (3.8) liefert

$$B_1 = -\frac{1}{2} m^2 , \quad B_2 = \frac{1}{2} , \quad B_3 = -1 \tag{3.10}$$

und damit

$$W(\psi, \phi) = -\phi_\mu \psi^{\mu\nu} \phi_\nu + \frac{1}{2} \psi^\mu{}_\mu (\phi^\nu \phi_\nu - m^2 \phi^2) . \tag{3.11}$$

Also haben die Eulerschen Bewegungsgleichungen zur Lagrangefunktion (3.7) die Gestalt

$$\varepsilon(\psi_{\alpha\beta}) L(\psi, \phi) = -G^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} T^{\alpha\beta}(\phi) = 0 \tag{3.12}$$

$$\varepsilon(\phi) L(\psi, \phi) = -2 K(\phi) - 2 K(\psi, \phi) = 0 \tag{3.13}$$

mit

$$K(\psi, \phi) \equiv \frac{1}{2} \psi^\mu{}_\mu K(\phi) - \partial_\mu(\psi^{\mu\nu} \phi_\nu) + \frac{1}{2} \psi^\mu{}_{\mu\nu} \phi^\nu . \tag{3.14}$$

Diese Gleichungen sind nun aber auf Grund von (2.13) und (3.6) widerspruchsvoll; es folgt nämlich aus (3.12)

$$\partial_\beta \varepsilon(\psi_{\alpha\beta}) L(\psi, \phi) = -\frac{1}{2} T^{\alpha\beta}(\phi)_\beta$$

$$= -K(\phi) \phi^\alpha . \tag{3.15}$$

$-K(\phi) \phi^\beta$ verschwindet jedoch nach (3.13) nicht, ausser wenn $\psi_{\mu\nu} = 0$. Diese Inkonsistenz wird behoben, indem man die Gleichungen (3.12) und (3.13) als Anfang einer Entwicklung auffasst. Dabei soll (3.12) der Term niedrigster Ordnung sein. Erklärt man die Ordnung einer Grösse und ihrer Ableitungen als gleich, so folgt aus (3.12), dass ψ und ϕ^2 die gleiche Ordnung haben (erste Ordnung).

Die rechte Seite von (3.15) geht dann nach (3.13) über in

$$-K(\phi) \phi^\alpha = K(\psi, \phi) \phi^\alpha$$

und ist in unserer Terminologie von zweiter Ordnung. In diesem Sinne sind die Gleichungen (3.12) und (3.13) verträglich; die Inkonsistenz tritt erst in zweiter Ordnung auf.

4. Konsistenz in zweiter Ordnung

Die Absicht ist nun, der Lagrangefunktion (3.7) einen zusätzlichen Wechselwirkungsterm W von höherer als zweiter Ordnung beizufügen, so dass die Bewegungsgleichungen bis zur zweiten Ordnung konsistent sind. Wir setzen deshalb

$$\mathbf{L}(\psi, \phi) = L(\psi, \phi) + W . \tag{4.1}$$

Die zugehörigen Eulerschen Gleichungen lauten

$$\varepsilon(\psi_{\alpha\beta}) \mathbf{L}(\psi, \phi) = -G^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} T^{\alpha\beta} + \varepsilon(\psi_{\alpha\beta}) W = 0 , \tag{4.2}$$

$$\varepsilon(\phi) \mathbf{L}(\psi, \phi) = -2 K(\phi) - 2 K(\psi, \phi) + \varepsilon(\phi) W = 0 . \tag{4.3}$$

Durch Divergenzbildung in (4.2) folgt dann mit (3.6)

$$\partial_\alpha \varepsilon(\psi_{\alpha\beta}) \mathbf{L}(\psi, \phi) = -K(\phi) \phi^\beta + \partial_\alpha \varepsilon(\psi_{\alpha\beta}) W . \tag{4.4}$$

Könnte man jetzt W so einrichten, dass die Beziehung

$$\partial_\alpha \varepsilon(\psi_{\alpha\beta}) W = -K(\psi, \phi) \phi^\beta \tag{4.5}$$

gilt, dann würden unsere Bewegungsgleichungen konsistent in zweiter Ordnung;

$$-K(\phi) \phi^\beta - K(\psi, \phi) \phi^\beta$$

wäre dann nämlich nach (4.3) mindestens von dritter Ordnung.

Die Frage ist nun, ob ein W existiert, das der Bedingung (4.5) genügt. Dazu müsste W quadratisch in ψ und linear in ϕ^2 sein; ausserdem dürfen keine Ableitungen von ψ auftreten, denn $K(\psi, \phi)$ enthält nur erste Ableitungen in ψ. Der allgemeinste Ansatz mit diesen Eigenschaften lautet

$$\begin{aligned} W \equiv W(\psi, \psi, \phi) = {} & C_1 \phi^2 \psi^{\mu\nu} \psi_{\mu\nu} + C_2 \phi^2 \psi^\mu{}_\mu \psi^\nu{}_\nu + C_3 \phi^\mu \phi_\mu \psi^{\nu\sigma} \psi_{\nu\sigma} \\ & + C_4 \phi^\mu \phi_\mu \psi^\nu{}_\nu \psi^\sigma{}_\sigma + C_5 \phi^\nu \psi_{\nu\sigma} \phi^\sigma \psi^\mu{}_\mu + C_6 \phi^\mu \psi_{\mu\nu} \psi^{\nu\sigma} \phi_\sigma . \end{aligned} \tag{4.6}$$

$\partial_\alpha \varepsilon(\psi_{\alpha\beta}) W(\psi, \psi, \phi)$ berechnet sich zu

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \varepsilon(\psi_{\alpha\beta}) W(\psi, \psi, \phi) = {} & \partial_\alpha \frac{\partial W(\psi, \psi, \phi)}{\partial \psi_{\alpha\beta}} \\ = {} & 2 C_1 [2 \phi \phi_\alpha \psi^{\alpha\beta} + \phi^2 \psi^{\alpha\beta}{}_\alpha] \\ & + 2 C_2 [2 \phi \phi_\alpha \psi^\nu{}_\nu + \phi^2 \psi^\nu{}_{\nu\alpha}] \eta^{\alpha\beta} \\ & + 2 C_3 [2 \phi^\mu{}_\alpha \phi_\mu \psi^{\alpha\beta} + \phi^\mu \phi_\mu \psi^{\alpha\beta}{}_\alpha] \\ & + 2 C_4 [2 \phi^\mu{}_\alpha \phi_\mu \psi^\nu{}_\nu + \phi^\mu \phi_\mu \psi^\nu{}_{\nu\alpha}] \eta^{\alpha\beta} \\ & + C_5 \eta^{\alpha\beta} [2 \phi^\mu{}_\alpha \psi_{\mu\nu} \phi^\nu + \phi^\mu \psi_{\mu\nu\alpha} \phi^\nu] \\ & + C_5 [\psi^\nu{}_{\nu\alpha} \phi^\alpha \phi^\beta + \psi^\nu{}_\nu \phi^\alpha{}_\alpha \phi^\beta + \psi^\nu{}_\nu \phi^\alpha \phi^\beta{}_\alpha] \\ & + C_6 [\phi^\alpha{}_\alpha \psi^{\beta\nu} \phi_\nu + \phi^\alpha \phi_\nu \psi^{\beta\nu}{}_\alpha + \phi^\alpha \psi^{\beta\nu} \phi_{\nu\alpha}] \\ & + C_6 [\phi^\beta{}_\alpha \phi_\mu \psi^{\mu\alpha} + \phi^\beta \psi^{\mu\alpha}{}_\alpha \phi_\mu + \phi^\beta \psi^{\mu\alpha} \phi_{\mu\alpha}] . \end{aligned} \tag{4.7}$$

Dies soll nun gleichgesetzt werden mit

$$-\phi^\beta K(\psi, \phi) = -\phi^\beta \left[\frac{1}{2} \psi^\nu{}_\nu \{\phi^\mu{}_\mu + m^2 \phi\} - \partial_\alpha \{\psi^{\alpha\mu} \phi_\mu\} + \frac{1}{2} \psi^\sigma{}_{\sigma\alpha} \phi^\alpha \right] . \tag{4.8}$$

Man überzeugt sich aber leicht, dass die Koeffizienten nicht so eingerichtet werden können, dass (4.5) gilt.

Es gibt nun einen andern Weg, die Gleichungen (4.2) (4.3) konsistent zu machen. Dazu muss man in der Lagrangefunktion (4.1) Terme dritter Ordnung in ψ allein einführen.

$$\hat{L}(\psi, \phi) = L(\psi, \phi) + \hat{L}(\psi) \tag{4.9}$$

Damit folgen die Eulerschen Gleichungen zu

$$\varepsilon(\psi_{\alpha\beta})\, \hat{L}(\psi, \phi) = -G^{\alpha\beta} - \hat{G}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} T^{\alpha\beta} + \varepsilon(\psi_{\alpha\beta})\, W = 0, \tag{4.10}$$

$$\varepsilon(\phi)\, \hat{L}(\psi, \phi) = -2\, K(\phi) - 2\, K(\psi, \phi) + \varepsilon(\phi)\, W = 0\,. \tag{4.11}$$

Dabei ist definitionsgemäss

$$\varepsilon(\psi_{\alpha\beta})\, \hat{L}(\psi) \equiv -\hat{G}^{\alpha\beta}\,. \tag{4.12}$$

W ist jetzt so einzurichten, dass eine Erweiterung der Bedingung (4.5), nämlich

$$\partial_\alpha\, \varepsilon(\psi_{\alpha\beta})\, W = -K(\psi, \phi)\, \phi^\beta + \frac{1}{2} A^\beta{}_{\alpha\mu}(\psi)\, T^{\alpha\mu}(\phi) + \frac{1}{2} B_\mu(\psi)\, T^{\beta\mu}(\phi) \tag{4.13}$$

erfüllt ist. $A^\beta{}_{\alpha\mu}(\psi)$ und $B_\mu(\psi)$ wirken dabei auf den Energie-Impuls-Tensor als Operatoren.

Aus (4.10) folgt

$$-G^{\alpha\beta}{}_\alpha - \hat{G}^{\alpha\beta}{}_\alpha - \frac{1}{2} T^{\alpha\beta}{}_\alpha + \partial_\alpha\, \varepsilon(\psi_{\alpha\beta})\, W = 0\,.$$

Mit (2.13) (3.6) und (4.13) wird daraus

$$-\hat{G}^{\alpha\beta}{}_\alpha - K(\phi)\, \phi^\beta - K(\psi, \phi)\, \phi^\beta + \frac{1}{2} A^\beta{}_{\alpha\mu}(\psi)\, T^{\alpha\mu} + \frac{1}{2} B_\mu(\psi)\, T^{\beta\mu}(\phi) = 0\,. \tag{4.14}$$

(4.11) liefert in zweiter Ordnung

$$K(\phi)\, \phi^\beta + K(\psi, \phi)\, \phi^\beta = 0$$

und (4.10)

$$-F(\psi)\, G^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} F(\psi)\, T^{\alpha\beta}(\phi) = 0\,.$$

$F(\psi)$ ist dabei irgend ein in ψ linearer Operator. Somit folgt aus (4.14) die Konsistenzbedingung

$$\hat{G}^{\alpha\beta}{}_\alpha + A^\beta{}_{\alpha\mu}(\psi)\, G^{\alpha\mu} + B_\mu(\psi)\, G^{\beta\mu} = 0\,. \tag{4.15}$$

Wir verlangen nun, dass diese Konsistenzforderung, die ja nicht von ϕ abhängt, eine Identität sei. Damit erweitern wir nach dem Noether-Hilbertschen Theorem unsere ursprüngliche Eichgruppe $E(\xi)$ zu einer Eichgruppe $\boldsymbol{E}(\xi)$. Über die Existenz eines $\hat{G}^{\alpha\beta}$, das (4.15) zur Identität macht, wird vorläufig nichts ausgesagt. Vielmehr müssen wir zuerst die Operatoren $A^\beta{}_{\alpha\mu}$ und B_μ bestimmen. Da unsere Feldgleichungen stets Differentialgleichungen zweiter Ordnung sein sollen, darf $A^\beta{}_{\alpha\mu}(\psi)$ bzw. $B_\mu(\psi)$ gemäss (4.15) höchstens erste Ableitungen von ψ enthalten. Deshalb ist das neue W auf Grund von (4.13) wieder von der Gestalt (4.6). Beachtet man, dass, symbolisch geschrieben, ein Term der Form $K(\phi)\, \phi\, \psi$ nach (4.11) in zweiter Ordnung verschwindet, so lautet die Bedingung (4.13):

$$\begin{aligned}
&2\, C_1\, [2\, \phi\, \phi_\alpha\, \psi^{\alpha\beta} + \phi^2\, \psi^{\alpha\beta}{}_\alpha] + 2\, C_2\, [2\, \phi\, \phi^\beta\, \psi^\nu{}_\nu + \phi^2\, \psi^\nu{}_\nu{}^\beta] \\
&\quad + 2\, C_3\, [2\, \phi^\mu{}_\alpha \phi_\mu\, \psi^{\alpha\beta} + \phi^\mu\, \phi_\mu\, \psi^{\alpha\beta}{}_\alpha] \\
&\quad + 2\, C_4\, [2\, \phi^{\mu\beta}\, \phi_\mu\, \psi^\nu{}_\nu + \phi^\mu\, \phi_\mu\, \psi^\nu{}_\nu{}^\beta] \\
&\quad + C_5\, [2\, \phi^{\mu\beta}\, \psi_{\mu\nu}\, \phi^\nu + \phi^\mu\, \psi_{\mu\nu}{}^\beta\, \phi^\nu] \\
&\quad + C_5\, [\psi^\nu{}_{\nu\alpha}\, \phi^\alpha\, \phi^\beta + \psi^\nu{}_\nu\, \phi^\alpha{}_\alpha\, \phi^\beta + \psi^\nu{}_\nu\, \phi^\alpha\, \phi^\beta{}_\alpha] \\
&\quad + C_6\, [\phi^\alpha{}_\alpha\, \psi^{\beta\nu}\, \phi_\nu + \phi^\alpha\, \psi^{\beta\nu}{}_\alpha\, \phi_\nu + \phi^\alpha\, \psi^{\beta\nu}\, \phi_{\nu\alpha}] \\
&\quad + C_6\, [\phi^\beta{}_\alpha \phi_\mu\, \psi^{\mu\alpha} + \phi^\beta\, \psi^{\mu\alpha}{}_\alpha\, \phi_\mu + \phi^\beta\, \psi^{\mu\alpha}\, \phi_{\mu\alpha}] \\
&= -\phi^\beta \left[-\psi^{\alpha\mu}{}_\alpha\, \phi_\mu - \psi^{\alpha\mu}\, \phi_{\mu\alpha} + \frac{1}{2}\, \psi^\sigma{}_{\sigma\alpha}\, \phi^\alpha\right] \\
&\quad + \frac{1}{2}\, A^\beta{}_{\alpha\mu}(\psi)\, [2\, \phi^\alpha\, \phi^\mu - \eta^{\alpha\mu}\, \phi^\sigma\, \phi_\sigma + \eta^{\alpha\nu}\, m^2\, \phi^2] \\
&\quad + \frac{1}{2}\, B_\mu(\psi)\, [2\, \phi^\mu\, \phi^\beta - \eta^{\mu\beta}\, \phi^\sigma\, \phi_\sigma + \eta^{\mu\beta}\, m^2\, \phi^2]\,.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Der Operator $B_\mu(\psi)$ darf kein Differentialoperator sein, denn er ist nach Voraussetzung linear in ψ. Also wirkt $B_\mu(\psi)$ multiplikativ.

Wenn nun $A^\beta{}_{\alpha\mu}(\psi)$ bezüglich α oder μ ein Differentialoperator wäre, so würde seine Wirkung auf $T^{\alpha\mu}$ einen Term der Form $K(\phi)\, \phi\, \psi$ liefern; dieser verschwindet aber in unserer Näherung. Für die Bedingung (4.16) ist dieser Sachverhalt gleichbedeutend wie $A^\beta{}_{\alpha\mu} = 0$. Damit liefert in (4.16) ein Vergleich der Terme proportional zu $\psi^\beta{}_{\alpha\mu}\, \phi^\alpha\, \phi^\mu$ und zu $\psi^{\alpha\mu}\, \phi^\beta\, \phi_{\alpha\mu}$ einen Widerspruch.

Setzt man $B_\mu(\psi) = 0$ und $A^\beta{}_{\alpha\mu}(\psi)$ als Differentialoperator in α bzw. μ an, so hätten wir wieder die frühere Situation, ausgedrückt durch die Forderung (4.5). Die Terme, die proportional $\phi^\alpha\, \phi^\mu$ sind, zeigen schliesslich, dass auch $A^\beta{}_{\alpha\mu}$ nur multiplikativ wirken darf.

Durch Koeffizientenvergleich und die Tatsache, dass $K(\phi)\, \phi\, \psi$ verschwindet, erhält man

$$B_\mu(\psi) = 0\,, \qquad A^\beta{}_{\alpha\mu}(\psi) = \psi^\beta{}_{\mu\alpha} - \frac{1}{2}\, \psi_{\alpha\mu}{}^\beta \tag{4.17}$$

und

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{1}{4}\, m^2 & C_4 &= \frac{1}{8} \\
C_2 &= -\frac{1}{8}\, m^2 & C_5 &= -\frac{1}{2} \\
C_3 &= -\frac{1}{4} & C_6 &= 1\,.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Zur Konsistenzbedingung (4.15) trägt, der Symmetrie von $G^{\alpha\beta}$ wegen, nur

$$\operatorname{Symm} A^\beta{}_{\alpha\mu}(\psi) \equiv \Gamma^\beta{}_{\alpha\mu}(\psi) = \frac{1}{2}\, [\psi^\beta{}_{\alpha\mu} + \psi^\beta{}_{\mu\alpha} - \psi_{\alpha\mu}{}^\beta] \tag{4.19}$$

bei; also

$$\hat{G}^{\alpha\beta}{}_\alpha + \Gamma^\beta{}_{\alpha\mu}(\psi)\, G^{\alpha\mu} = 0\,. \tag{4.20}$$

Diese Bedingung ist unabhängig vom Materiemodell und soll eine Identität sein. Der Vollständigkeit halber geben wir noch explizite (4.6) an

$$W(\psi, \varphi, \phi) = \frac{m^2}{4} \phi^2 \psi_{\mu\nu} \psi^{\mu\nu} - \frac{m^2}{8} \phi^2 \psi^\mu_{\ \mu} \psi^\nu_{\ \nu} - \frac{1}{4} \phi^\mu \phi_\mu \psi_{\sigma\varrho} \psi^{\sigma\varrho}$$
$$+ \frac{1}{8} \phi^\mu \phi_\mu \psi^\nu_{\ \nu} \psi^\sigma_{\ \sigma} - \frac{1}{2} \psi^\mu_{\ \mu} \phi^\sigma \psi_{\sigma\varrho} \phi^\varrho + \phi^\mu \psi_{\mu\sigma} \psi^{\sigma\nu} \phi_\nu .$$

5. Die erweiterte Eichgruppe $E(\xi)$

Zur Berechnung der Strukturkonstanten der Eichgruppe $\boldsymbol{E}(\xi)$, welche zur Identität (4.19) führt, brauchen wir noch nichts über die Existenz von $\hat{L}(\psi)$ in (4.9) auszusagen. Fordern wir nämlich, dass die Eichgruppe $E(\xi)$ die eingeführte Ordnungsdefinition invariant lässt, so hat ξ dieselbe Ordnung wie ψ. Deshalb besteht die erweiterte Eichgruppe $\boldsymbol{E}(\xi)$, nur quadratische Terme berücksichtigend, aus den Transformationen

$$\boldsymbol{T}(\xi)\, \psi_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} + \xi_{\mu\nu} + \xi_{\nu\mu} + Q_{\mu\nu}(\psi, \xi) + B_{\mu\nu}(\xi, \xi) \tag{5.1}$$

und den inversen Transformationen

$$\boldsymbol{T}(\xi)^{-1}\, \psi_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} - \xi_{\mu\nu} - \xi_{\nu\mu} - Q_{\mu\nu}(\psi, \xi) + Q_{\mu\nu}(\partial\xi, \xi) - B_{\mu\nu}(\xi, \xi) . \tag{5.2}$$

Dabei bedeutet

$$(\partial\xi)_{\alpha\beta} = \xi_{\alpha\beta} + \xi_{\beta\alpha} , \tag{5.3}$$

$Q_{\mu\nu}$ und $B_{\mu\nu}$ sind noch zu bestimmen.

Anstelle von $Q_{\mu\nu}$ und $B_{\mu\nu}$ schreiben wir oft kurz Q bzw. B.

Für die Strukturkonstanten $S(\xi, \varphi)$, die mit dem gruppentheoretischen Kommutator wie folgt zusammenhängen:

$$\boldsymbol{T}(\xi)\, \boldsymbol{T}(\varphi)\, \boldsymbol{T}(\xi)^{-1}\, \boldsymbol{T}(\varphi)^{-1} = 1 + S(\xi, \varphi) + 0(3) , \tag{5.4}$$

erhält man aus (5.1) und (5.2)

$$S(\xi, \varphi) = -Q(\partial\xi, \varphi) + Q(\partial\varphi, \xi) ; \tag{5.5}$$

diese sind unabhängig von B. Da der gruppentheoretische Kommutator wieder ein Gruppenelement ist, so gilt mit (5.4) bis zur zweiten Ordnung

$$1 + S(\xi, \varphi) = T(\chi(\xi, \varphi)) \tag{5.6}$$

oder

$$S(\xi, \varphi) = \partial\chi(\xi, \varphi) , \tag{5.7}$$

Aus (5.5) folgt damit

$$-Q(\partial\varphi, \xi) + Q(\partial\xi, \varphi) = \partial\chi(\xi, \varphi) , \tag{5.8}$$

eine Bedingung an die Q, die wir später ausnützen.

Bekanntlich muss eine Identität der Art (4.20) aus einer infinitesimalen Transformation (Eichung) folgen. Dabei hat der Begriff «infinitesimal» nichts mit unserer Ordnungsdefinition zu tun; er bezieht sich vielmehr auf die Parameter der Gruppe.

Mit dem Variationsprinzip

$$\int [\hat{G}^{\alpha\beta} + G^{\alpha\beta}]\, \delta\psi_{\alpha\beta}\, dx = 0 \tag{5.9}$$

und

$$\delta\psi = \partial\xi + Q(\psi, \xi) \tag{5.10}$$

folgt bis auf höhere Ordnung

$$\int [\hat{G}^{\alpha\beta} + G^{\alpha\beta}]\, [2\, \xi_{\alpha\beta} + Q_{\alpha\beta}]\, dx$$
$$= \int 2\, \partial_\beta(\hat{G}^{\alpha\beta}\, \xi_\alpha)\, dx + \int 2\, \partial_\beta(G^{\alpha\beta}\, \xi_\alpha)\, dx$$
$$- \int 2\, \hat{G}^{\alpha\beta}_{\ \ \beta}\, \xi_\alpha\, dx - \int 2\, G^{\alpha\beta}_{\ \ \alpha}\, \xi_\alpha\, dx$$
$$+ \int G^{\alpha\beta}\, Q_{\alpha\beta}\, dx ,$$

das heisst

$$-2 \int \hat{G}^{\alpha\beta}_{\ \ \beta}\, \xi_\alpha\, dx + \int G^{\alpha\beta}\, Q_{\alpha\beta}\, dx = 0 .$$

Umgeformt nach (4.20)

$$\int G^{\alpha\beta}\, (Q_{\alpha\beta} + 2\, \Gamma^\mu_{\ \alpha\beta}\, \xi_\mu)\, dx = 0 . \tag{5.11}$$

Für Q setzen wir nun den allgemeinsten Ausdruck, der (5.11) erfüllen kann, an:

$$Q_{\alpha\beta}(\psi, \xi) = D_1\, \psi_{\alpha\beta\nu}\, \xi^\nu + D_2\, \psi_{\alpha\nu}\, \xi^\nu_{\ \beta}$$
$$+ D_3\, \psi_{\beta\nu}\, \xi^\nu_{\ \alpha} + D_4\, \psi_{\beta\nu\alpha}\, \xi^\nu$$
$$+ D_5\, \psi_{\alpha\nu\beta}\, \xi^\nu . \tag{5.12}$$

(5.11) liefert nun

$$\int G^{\alpha\beta}\, [D_1\, \psi_{\alpha\beta}^{\ \ \ \mu} - D_2\, \psi_\alpha^{\ \mu}{}_\beta - D_3\, \psi_\beta^{\ \mu}{}_\alpha$$
$$+ D_4\, \psi_\beta^{\ \mu}{}_\alpha + D_5\, \psi_\alpha^{\ \mu}{}_\beta + 2\, \Gamma^\mu_{\ \alpha\beta}]\, \xi_\mu\, dx = 0 . \tag{5.13}$$

Durch Koeffizientenvergleich folgt

$$D_1 = 1$$
$$- D_2 + D_5 = -1$$
$$- D_3 + D_4 = -1 . \tag{5.14}$$

Eine kleine Rechnung zeigt, dass (5.8) nur gelten kann, wenn

$$D_4 = D_5 = 0 .$$

Also führte (5.12) zu

$$Q_{\alpha\beta}(\psi, \xi) = \psi_{\alpha\beta\mu}\, \xi^\mu + \psi_{\alpha\mu}\, \xi^\mu_{\ \beta} + \psi_{\beta\mu}\, \xi^\mu_{\ \alpha} \tag{5.15}$$

und (5.5) wird

$$S(\xi, \varphi) = - (\xi_{\alpha\beta\mu} + \xi_{\beta\alpha\mu})\, \varphi^\mu$$
$$- (\xi_{\alpha\mu} + \xi_{\mu\alpha})\, \varphi^\mu_{\ \beta} - (\xi_{\beta\mu} + \xi_{\mu\beta})\, \varphi^\mu_{\ \alpha}$$
$$+ (\varphi_{\alpha\beta\mu} + \varphi_{\beta\alpha\mu})\, \xi^\mu$$
$$+ (\varphi_{\alpha\mu} + \varphi_{\mu\alpha})\, \xi^\mu_{\ \beta} + (\varphi_{\beta\mu} + \varphi_{\mu\beta})\, \xi^\mu_{\ \alpha} . \tag{5.16}$$

Mit (5.7) und (5.16) folgt

$$S(\xi, \varphi) = \partial[\xi, \varphi] , \tag{5.17}$$

wobei

$$[\xi, \varphi] \equiv \chi(\xi, \varphi) = \varphi' \xi - \xi' \varphi \tag{5.18}$$

oder in Komponenten, mit η hochgezogen,

$$[\xi, \varphi]^\mu = \varphi^\mu{}_\nu \, \xi^\nu - \xi^\mu{}_\nu \, \varphi^\nu . \tag{5.19}$$

Bis zur zweiten Ordnung gilt also in unserer erweiterten Eichgruppe $\boldsymbol{E}(\xi)$

$$\boldsymbol{T}(\xi) \, \boldsymbol{T}(\varphi) \, \boldsymbol{T}(\xi)^{-1} \, \boldsymbol{T}(\varphi)^{-1} = \boldsymbol{T}([\xi, \varphi]) . \tag{5.20}$$

Man sieht, die Strukturkonstanten (5.19) sind nichts anderes als das Lieprodukt in der Liealgebra der Vektorfelder $\mathfrak{X}(\mathfrak{M})$ einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}(M)$. Das bedeutet aber für ξ^μ Vektorcharakter nicht nur bezüglich der Lorentzgruppe, sondern bezüglich der Kovarianzpseudogruppe $K(M)$.

Zur Herleitung der Identität (4.20) haben wir von der Eichgruppe nur die Terme bis zur zweiten Ordnung heranziehen müssen. Für die ganze Eichgruppe sollen jedoch die Strukturkonstanten unabhängig sein vom Substrat, auf das die Gruppe wirkt; das heisst die Bedingung (5.20) gilt allgemein. Damit wird $\boldsymbol{E}(\xi)$ isomorph zu $K(M)$.

6. Das Gravitationsfeld als Metrisches Feld

An dieser Stelle sei bemerkt, dass unsere Rechnungen rein algebraischen Charakter haben. In diesem Sinne legt uns die Eichgruppe $\boldsymbol{E}(\xi)$ die ganze Theorie fest; sie führt nämlich eindeutig von einer Ordnung zur nächsthöheren. Dieser Gesichtspunkt wurde in den Arbeiten 1) und 2) nicht beachtet.

Wir können nun unseren formalen Ausdrücken einen Sinn geben, indem wir die Eichgruppe $\boldsymbol{E}(\xi)$ mit der Kovarianzpseudogruppe $K(M)$ identifizieren. $\psi_{\mu\nu}$ transformiert sich aber nach (5.1) nicht wie ein Tensor, vielmehr setzt man irgendeine Funktion $g_{\mu\nu} = f_{\mu\nu}(\psi)$ an, die ein Tensor sei. Die einzige Invariante, die man aus den $g_{\mu\nu}$ bilden kann, so dass deren Variationsprinzip auf Differentialgleichungen zweiter Ordnung führt, ist nach H. Weyl die skalare Krümmung $I = R(g_{\mu\nu})$. Vergleicht man diese Lagrangefunktion und das Transformationsverhalten der $g_{\mu\nu}$ mit dem Anfang der Entwicklung unserer Theorie, so folgt, dass $f_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \psi_{\mu\nu}$ in niedrigster Ordnung ein Tensor ist. Die Ordnungsdefinition erlaubt aber, allgemein $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \psi_{\mu\nu}$ als Metrik zu setzen. Somit ist unsere Theorie die Einsteinsche Gravitationstheorie. Dadurch wird die Existenz der Lagrangefunktion $\hat{L}(\psi)$, die wir immer benützt haben, gewährleistet. Man kann jedoch auch den allgemeinsten Ansatz für $\hat{L}(\psi)$ hinschreiben und die Koeffizienten mittels der Identität (4.20) eindeutig bestimmen. Dies beruht wesentlich auf der Tatsache, dass $\hat{G}^{\alpha\beta}$ eine Variationsableitung ist.

Literaturverzeichnis

1) W. Thirring, *Fortschritte der Physik 7*, 79 (1959).
2) S. N. Gupta, *Revs. Modern Phys. 29*, 334 (1957).
3) M. Fierz, *Helv. Phys. Acta 13*, 45 (1940).
4) E. Noether, *Göttinger Nachrichten*, 235 (1918); D. Hilbert, *Math. Ann. 92*, 1 (1924).
5) S. Kobayashi und K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, 1963.

Branching Rules and Clebsch-Gordan Series of Semi-Simple Lie Algebras

by **N. Straumann**
CERN – Geneva

(6. V. 1965)

Abstract. We derive explicit formulae (branching rules) for the decomposition of an irreducible representation of a semi-simple Lie algebra L relative to semi-simple subalgebras L'. These formulae are valid for a large class of subalgebras L'. As an special case, we obtain an explicit formula for the Clebsch-Gordan series of semi-simple Lie algebras.

Introduction

Since the success of the octet model of Gell-Mann and Ne'eman (SU_3/Z_3) higher symmetry groups have come to play an increasingly important role in particle physics. Like the isospin invariance these higher symmetries are broken symmetries. This means that only some dominant part of the strong interactions is invariant under such a higher symmetry group while some weaker part is not. (In the case of isospin the electromagnetic interaction breaks the isospin symmetry but still leaves invariant the subgroup U_1 of "rotations around the third axis" in isospin space.)

Let $H = H_0 + H'$ be the corresponding splitting of the Hamilton operator, where H_0 is invariant with respect to some higher symmetry group G. This means that there exists a unitary representation of G in the Hilbert space of states which commutes with H_0. The Hilbert space can now be decomposed into a direct sum of irreducible (finite dimensional for compact G) subspaces in which the energy H_0 is constant (supermultiplets). The symmetry breaking interaction H' which is only invariant with respect to a subgroup $G' \subset G$ splits the supermultiplets up into multiplets of G' corresponding to the decomposition into irreducible constituents for G'. For instance in the octet model the spin $^1/_2$ octet of baryons splits under the medium strong interactions into the charge multiplets N, Λ, Σ, Ξ.

This is typical of broken symmetry schemes: one always has to decompose the irreducible representations of some higher symmetry group into irreducible constituents with respect to some subgroup. It is this general problem which we intend to study in this paper. More precisely we shall discuss the following question.

Given an irreducible module $\mathfrak{M}_\Lambda$ of a semi-simple Lie algebra $\mathfrak{L}$ (corresponding to a higher symmetry group) with the highest weight Λ and a semi-simple subalgebra $\mathfrak{L}' \subset \mathfrak{L}$. $\mathfrak{M}_\Lambda$, considered as a module for $\mathfrak{L}'$, is completely reducible. Let $\mathfrak{M}_\Lambda = \bigoplus_\lambda m_\lambda \, \mathfrak{N}_\lambda$ be the corresponding decomposition into irreducible constituents with the highest weights λ of $\mathfrak{L}'$ and multiplicities m_λ. One is then interested in m_λ.

In some special cases the solution of this 'branching problem' is well known[1]).

In this paper we shall derive an explicit formula for m_λ, which is valid for arbitrary semi-simple $\mathfrak{L}$ and a large class of subalgebras $\mathfrak{L}'$. As a special case we obtain a