Übungen zur Vorlesung

Gravitationsphysik - Theoretischer Teil

von Domenico Giulini

Blatt 10

Aufgabe 1

Die gravitative Abstrahlungsleistung eines um den Mittelpunkt mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden Balkens ist gegeben durch

$$P_{\text{GW}} = \frac{32}{5} \cdot \frac{G}{c^5} \cdot \omega^6 \cdot I'^2 . \tag{1}$$

Dabei ist I' das konstante Trägheitsmoment im körperfesten Bezugssystem bei Drehungen um eine zur Balkenachse senkrechte Achse durch den Mittelpunkt.

Geben Sie I' als Funktion der (homogenen) Massendichte ρ des Balkenmaterials, des konstanten Balkenquerschnitts q und seiner Länge L an. Berechnen Sie die maximale im Balken auftretende Längsspannung σ_{max}, ebenfalls als Funktion dieser Größen. Zeigen Sie schließlich, dass bei Vorgabe einer maximalen Spannung die Abstrahlungsleistung durch

$$P_{\text{GW}} \leq \frac{2024}{45} \cdot \frac{G}{c^5} \cdot \frac{q^2 \sigma_{\text{max}}^3}{\rho} \tag{2}$$

nach oben beschränkt ist. Wie interpretieren Sie das Auftreten von ρ im *Nenner*, was ja heißt, dass größere Ausbeuten mit spezifisch *leichteren* Materialien zu erzielen sind?

Zeigen Sie weiter anhand der in der Vorlesung abgeleiteten Gleichung für die Amplituden, dass die h_+-Amplitude (Blickrichtung parallel zur Rotationsachse) beschränkt ist durch

$$|h_+| \leq \frac{4}{3} \cdot \frac{L}{r} \cdot \frac{G\sigma_{\text{max}}}{c^4} . \tag{3}$$

Denken Sie sich Zahlenbeispiele aus. Für Stahl ist $\rho^{\text{Stahl}} = 7,85\,\text{g}/\text{cm}^3$, $\sigma_{\text{max}}^{\text{Stahl}} = 2100\,\text{N}/\text{mm}^2$ und für Glasfaser $\rho^{\text{Glasf.}} = 2,5\,\text{g}/\text{cm}^3$, $\sigma_{\text{max}}^{\text{Glasf.}} = 4800\,\text{N}/\text{mm}^2$. Welche maximalen Geschwindigkeiten erreichen die Balkenenden? Finden Sie effektivere Materialien?

Aufgabe 2

Im Krebsnebel befindet sich als Überrest der Supernova SN 1054 der Pulsar PSR 0531+21. Sein Abstand zu uns beträgt etwa $2000\,\text{pc} \approx 6500$ Lichtjahre und seine Pulsperiode ist $T = 3,38 \cdot 10^{-2}\,\text{s}$. Diese vergrößert sich aufgrund Energieverlusts gemäß

$$\dot{T} = 4,2 \cdot 10^{-13} . \tag{4}$$

Nehmen Sie zunächst an, der Pulsar sei eine homogene Kugel vom Radius $15\,\text{Km}$ mit einer Masse von $1,5$ Sonnenmassen. Wie groß ist dann gemäß (4) die zeitliche Änderungsrate $\dot{E}_{\text{rot}}$ der Rotationsenergie? Welche Elliptizität ε müsste ein starrer Körper gleichen Trägheitsmomentes besitzen, damit er bei gleicher Rotationsperiode die entsprechende Leistung an Gravitationswellen abstrahlt? Welche Gravitationswellenamplitude bzw. relative Längenänderung $\Delta\ell/\ell$ würde man dann auf der Erder erwarten?

Verfeinern Sie nun das Modell etwas, in dem Sie annehmen, der Pulsar sei ein Voll-Ellipsoid mit Halbachsen a, b und c,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\,, \tag{5}$$

wobei $c = a$ und $b = a + \delta a$ mit $|\delta a| \ll a$. Berechnen Sie die Trägheitsmomente um die x, y und z-Achse (Hauptträgheitsachsen) und setzen Sie die Elliptizität gleich der oben abgeschätzten. Welchen Höhenunterschied δa müsste demnach die Oberfläche des Pulsars entlang seines Äquators aufweisen? Halten Sie diese für realistisch?

Aufgabe 3

In Bezug auf den Krebsnebel (Aufgabe 2) ist wahrscheinlich, dass sein Energieverlust wesentlich auf magnetische Dipolstrahlung zurückzuführen ist. Für diese ist $\dot{E}_{\text{rot}} \propto \omega^4$. Zeigen Sie: Gilt allgemein $\dot{E}_{\text{rot}} \propto \omega^n$, dann ist

$$\frac{T\,\ddot{T}}{\dot{T}^2} = 3 - n\,. \tag{6}$$

Wie könnte man also im Prinzip (leider bisher nicht praktisch) *durch Beobachtung am System* zwischen dem Energieverlust in magnetische Dipolstrahlung und dem in gravitative Quadrupolstrahlung unterscheiden?