Übungen zur Vorlesung

Gravitationsphysik - Theoretischer Teil

von DOMENICO GIULINI

Blatt 2

Aufgabe 1

In der Vorlesung wurden Raumkurven $\vec{z}(\lambda)$ diskutiert, wobei λ ein beliebiger Parameter ist. Die Krümmung der Kurve wurde durch $\kappa = \|\ddot{\vec{z}}\|$ definiert, wobei ein Punkt die Ableitung nach der Eigenlänge bezeichnet. Die Ableitung nach dem allgemeinen Parameter λ bezeichnen wir im Folgenden mit einen Strich.

Zeigen Sie, dass

$$\kappa := \frac{\|\vec{z}' \times \vec{z}''\|}{\|\vec{z}'\|^3}\,. \tag{1}$$

Zeigen Sie damit: Ist die Kurve eben und in der Form $\vec{z}(\lambda) = (x(\lambda), y(\lambda), 0)$ gegeben, so ist die Krümmung gleich

$$\kappa := \frac{|x'y'' - y'x''|}{\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}}\,. \tag{2}$$

Spezialisieren Sie auf den Fall, in dem die Kurve als Graph $y(x)$ in der xy-Ebene gegeben ist.

Aufgabe 2

Gemäß der 2. Frenet-Serret-Formel

$$\dot{\vec{e}}_2 = -\kappa\vec{e}_1 + \tau\vec{e}_3 \tag{3}$$

genügt die Torsion τ der Gleichung

$$\tau = \dot{\vec{e}}_2 \cdot \vec{e}_3\,. \tag{4}$$

Zeigen Sie damit, dass

$$\tau = \frac{\left(\dot{\vec{z}} \times \ddot{\vec{z}}\right) \cdot \dddot{\vec{z}}}{\|\ddot{\vec{z}}\|^2}\,, \tag{5}$$

wobei ein Punkt die Ableitung nach der Eigenlänge s bezeichnet. Zeigen Sie weiter: Ersetzt man s durch einen beliebigen Parameter λ, so dass

$$\frac{d}{ds} = \frac{1}{\|\vec{z}'\|}\frac{d}{d\lambda}\,, \tag{6}$$

dann ist

$$\tau = \frac{\left(\vec{z}' \times \vec{z}''\right) \cdot \vec{z}'''}{\|\vec{z}' \times \vec{z}''\|^2}\,, \tag{7}$$

wobei ein Strich nun die Ableitung nach λ anzeigt.

Aufgabe 3

Sei $\vec{z}(s)$ die Darstellung einer Kurve, wobei s die Eigenlänge (gemessen von einem willkürlichen gewählten Anfangspunkt) bezeichnet. Wir suchen die Mittelpunkte $\vec{m}$ aller Kugeln, an denen die Kurve bei $s = s_0$ einen Berührungspunkt dritter Ordnung hat (altfränkisch *Schmiegkugeln* genannt). Das bedeutet, dass die Funktion $f(s) = (\vec{z}(s) - \vec{m})^2$ bei $s = s_0$ gerade den Wert R^2 annimmt, wobei R der (noch unbekannte) Radius einer solchen Kugel ist, und dass die ersten drei Ableitungen von f bei $s = s_0$ verschwinden. (Ableitungen nach s werden wie in der Vorlesung durch einen Punkt gekennzeichnet.)

Wählen Sie die Darstellung

$$\vec{m} = \vec{z}(s_0) + m_1\vec{e}_1 + m_2\vec{e}_2 + m_3\vec{e}_3\,, \tag{8}$$

wobei $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ das in der Vorlesung eingeführte begleitende Dreibein ist, und zeigen Sie, dass sich folgende Bedingungen für die Koeffizienten m_a ergeben:

$\dot{f}(s_0) = 0$ is äquivalent zu

$$m_1 = 0\,. \tag{9a}$$

$\ddot{f}(s_0) = 0$ ist äquivalent zu

$$m_2\kappa(s_0) = 1\,. \tag{9b}$$

$\dddot{f}(s_0) = 0$ ist äquivalent zu

$$-\kappa^2(s_0)m_1 + m_2\dot{\kappa}(s_0) + m_3\kappa(s_0)\tau(s_0) = 0\,. \tag{9c}$$

(Tipp: erinnern Sie sich an die zweite Frenet-Serret-Formel: $\dot{\vec{e}}_2 = -\kappa\vec{e}_1 + \tau\vec{e}_3$.)

Um (9b) zu erfüllen muss offensichtlich $\kappa(s_0) \neq 0$ gelten. Nehmen Sie $\tau(s_0) \neq 0$ an und berechnen Sie den Radius der Schmiegkugel. Was passiert im Fall $\tau(s_0) = 0$? (Tipp: Eine ebene Kurve hat an jedem Punkt mit $\kappa \neq 0$ einen eindeutigen Schmiegkreis, der mit der Kurve einen Berührungspunkt *zweiter* Ordnung hat.)