Übungen zur Vorlesung

Gravitationsphysik - Theoretischer Teil

von DOMENICO GIULINI

Blatt 5

Aufgabe 1

Sei $\{x^\mu\}$ ein geodätisches Normalkoordinatensystem um den Punkt p der Raumzeit; d.h. es gilt $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(p) = 0$, was äquivalent ist zu $\partial_\lambda g_{\mu\nu}(p) = 0$. Zeigen Sie, dass bezüglich diesem Koordinatensystem die Komponenten des kovarianten (d.h. alle Indizes unten) Krümmungstensors $R_{\alpha\beta\mu\nu} := g_{\alpha\lambda} R^\lambda{}_{\beta\mu\nu}$ durch folgende Formel gegeben sind (wir schreiben $\partial^2_{\alpha\beta} := \partial_\alpha \partial_\beta$ etc.):

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \tfrac{1}{2}(-\partial^2_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - \partial^2_{\beta\nu} g_{\alpha\mu} + \partial^2_{\alpha\nu} g_{\beta\mu} + \partial^2_{\beta\mu} g_{\alpha\nu})\,. \tag{1}$$

Leiten Sie daraus die in jedem Koordinatensystem gültigen Symmetrierelationen ab

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}\,, \tag{2}$$

$$3\,R_{\alpha[\beta\mu\nu]} = R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0\,. \tag{3}$$

Gleichung (3) nennt man auch die *erste Bianchi-Identität*. Zeigen Sie mit (2) und (3), dass der Krümmungstensor in n Dimensionen die folgende Anzahl unabhängiger Komponenten hat:

$$\#(R_{\alpha\beta\mu\nu}) = \begin{cases} \frac{1}{2}N(N-1) \quad \text{mit} \quad N = \frac{1}{2}n(n+1) & \text{für } n = 2, 3\,, \\ \frac{1}{12}n^2(n^2-1) & \text{für } n \geq 4\,. \end{cases} \tag{4}$$

Aufgabe 2

Zeigen Sie mit (1) die Relation

$$\partial_\lambda R_{\alpha\beta\mu\nu}(p) + \partial_\mu R_{\alpha\beta\nu\lambda}(p) + \partial_\nu R_{\alpha\beta\lambda\mu}(p) = 0\,. \tag{5}$$

Diese Relation gilt nur am Punkt p und auch dort nur im Normalkoordinatensystem. Begründen Sie, warum trotzdem damit bereits folgende, in jedem Koordinatensystem (und an jedem Punkt) gültige Relation bewiesen ist (sog. *zweite Bianchi-Identität*):

$$\nabla_\lambda R_{\alpha\beta\mu\nu} + \nabla_\mu R_{\alpha\beta\nu\lambda} + \nabla_\nu R_{\alpha\beta\lambda\mu} = 0\,. \tag{6}$$

Man definiert

$$R_{\mu\nu} :=\ g^{\alpha\beta} R_{\mu\alpha\nu\beta} \qquad \text{(Ricci-Tensor)}\,, \tag{7}$$

$$R :=\ g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \qquad \text{(Ricci-Skalar)}\,, \tag{8}$$

$$G_{\mu\nu} :=\ R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} R \qquad \text{(Einstein-Tensor)}\,. \tag{9}$$

Zeigen Sie die Symmetrie von $R_{\mu\nu}$ und $G_{\mu\nu}$. Leiten Sie durch Kontraktion der Bianchi-Identität (6) über (α, μ) und (β, ν) die kovariante Divergenzfreiheit des Einstein-Tensors ab:

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0\,. \tag{10}$$

Aufgabe 3

Seien X und Y zwei Tangentialvektoren am Punkte p einer Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 3$. Wie in der Vorlesung wird die *Schnittkrümmung* am Punkte p definiert durch die Gauß'sche Krümmung derjenigen Fläche, die erzeugt wird durch alle Geodätische durch p und deren Richtung in p tangential an die durch X und Y aufgespannte Ebene ist. Also ist

$$K_p(X,Y) = \frac{X^\alpha Y^\beta \, R_{\alpha\beta\,\mu\nu} \, X^\mu Y^\nu}{X^\alpha Y^\beta \left(g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu} \right) X^\mu Y^\nu} \tag{11}$$

Machen Sie sich klar, dass in Falle einer positiv definiten Metrik der Nenner einfach die Bedeutung des durch X und Y aufgespannten Flächeninhalts hat. Für indefinite Metriken schränken wir die Wahl der Paare (X,Y) durch die Forderung ein, dass der Nenner in (11) nicht verschwinden möge (keine lichtartigen Ebenen).

Rechnen Sie nach, dass die rechte Seite von (11) nur von der durch X und Y aufgespannten Ebene abhängt, nicht jedoch von der Wahl der Basisvektoren, die diese Ebene aufspannen.

Zeigen Sie mit Hilfe von (2), dass der Krümmungstensor am Punkte durch die Schnittkrümmungen am Punkte p eindeutig bestimmt ist. Tipp: Eine symmetrische Bilinearform $B : V \times V \to \mathbb{R}$ auf einem reellen Vektorraum V ist durch die zugehörige Quadratische Form $Q(X) := B(X,X)$ vollständig bestimmt, denn es gilt: $B(X,Y) = \frac{1}{2}\big(B(X+Y\,,\,X+Y) - B(X,X) - B(Y,Y)\big)$.

Hängt an jedem Punkt die Schnittkrümmung nicht einmal von der Wahl der durch X und Y aufgespannten Fläche ab, so gilt nach (11), dass

$$R_{\alpha\beta\,\mu\nu} = K\big(g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu}\big)\,, \tag{12}$$

wobei K noch eine Funktion des Ortes sein kann. Zeigen Sie mit Hilfe von (10), dass für $n \geq 3$ Dimensionen K in der Tat konstant sein muss. Solche Mannigfaltigkeiten nennt man *von konstanter Krümmung*.

Aufgabe 4

Im Folgenden seien alle Komponenten von Tensoren am betreffenden Punkt auf eine orthonormale Basis einer vier-dimensionalen Lorentz'schen Mannigfaltigkeit bezogen, so dass $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$. Dabei seien die Indizes von 0 bis 3 durchnummeriert.

Zeigen Sie, dass die 00-Komponente des Einsteintensors durch die Summe der räumlichen Schnittkrümmungen wir folgt ausgedrückt werden kann:

$$G_{00} = -\tfrac{1}{2} \sum_{a=1}^{3} \sum_{b=1}^{3} R_{ab\,ab}\,. \tag{13}$$

(Das Minuszeichen ist unserer Signaturkonvention geschuldet, in der die räumliche Metrik negativ-definit ist. Hätten wir die Signatur $(-1,1,1,1)$ gewählt, so müsste rechts in (13) ein Pluszeichen stehen.) Rechnen Sie nach, dass die rechte Seite invariant ist unter orthogonalen Transformationen der räumlichen Basisvektoren. Formulieren Sie nun in Worten so präzise wie möglich, in welchem Sinne gemäß den Einsteingleichungen eine Massen- bzw. Energiedichte den „Raum krümmt“.

Aufgabe 5

Den vollständig spurfreien Anteil des Riemanntensors nennt man den *Weyltensor*. Er ist in $n > 2$ Dimensionen gegeben durch

$$\begin{aligned} C_{\alpha\beta\mu\nu} := {} & R_{\alpha\beta\mu\nu} \\ & - \frac{1}{n-2}\big(g_{\alpha\mu}R_{\beta\nu} + g_{\beta\nu}R_{\alpha\mu} - g_{\alpha\nu}R_{\beta\mu} - g_{\beta\mu}R_{\alpha\nu}\big) \\ & + \frac{R}{(n-1)(n-2)}\big(g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}\big) \,. \end{aligned} \tag{14}$$

Rechnen Sie nach, dass $C_{\alpha\beta\mu\nu}$ dieselben Symmetrien wie der Riemanntensor besitzt und dass er zusätzlich vollständig spurfrei ist. Zeigen Sie damit, dass die Anzahl der unabhängigen Komponenten des Weyltensors gegeben ist durch

$$\#(C_{\alpha\beta\mu\nu}) = \tfrac{1}{12}n(n+1)\big[n(n-1) - 6\big] \,. \tag{15}$$

Insbesondere verschwindet der Weyltensor für $n = 3$ identisch.

Aufgabe 6

In der Vorlesung wurden zwei Metriken g und $\tilde{g}$ als *konform äquivalent* erklärt, wenn es eine glatte, reellwertige Funktion Ω gibt, mit

$$\tilde{g} = \exp(\Omega)\, g \,. \tag{16}$$

Zeigen Sie, dass die zu $\tilde{g}$ bzw. g gehörigen Christoffelsymbole wie folgt in Beziehung stehen:

$$\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} + \tfrac{1}{2}\big(-g^{\mu\nu}g_{\alpha\beta}\Omega_{,\nu} + \delta^{\mu}_{\alpha}\Omega_{,\beta} + \delta^{\mu}_{\beta}\Omega_{,\alpha}\big) \,. \tag{17}$$

Argumentieren Sie nun, dass dies eine Beziehung zwischen den kovarianten Komponenten der Krümmungstensoren der folgenden allgemeinen Form impliziert

$$\tilde{R}_{\alpha\beta\mu\nu} = \exp(\Omega)\, R_{\alpha\beta\mu\nu} + g_{\alpha\mu}\, K_{\beta\nu} + g_{\beta\nu}\, K_{\alpha\mu} - g_{\alpha\nu}\, K_{\beta\mu} - g_{\beta\mu}\, K_{\alpha\nu} \,, \tag{18}$$

wobei $K_{\beta\nu}$ von der Metrik g und ihren ersten Ableitungen, sowie der Funktion Ω und ihren ersten und zweiten Ableitungen abhängt. Die genauere Form dieser Abhängigkeit braucht uns hier nicht weiter zu interessieren.

Schließen Sie aus (18) ohne weiteres Rechnen, dass

$$\tilde{C}_{\alpha\beta\mu\nu} = \exp(\Omega)\, C_{\alpha\beta\mu\nu} \tag{19}$$

bzw.

$$\tilde{C}^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = C^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} \,. \tag{20}$$

Man nennt deshalb den Weyltensor auch den *konformen Krümmungstensor*.