Übungen zur Vorlesung

Gravitationsphysik - Theoretischer Teil

von Domenico Giulini

Blatt 7

Aufgabe 1

Betrachten Sie den radialen freien Fall einer Testmasse in der Schwarzschildgeometrie

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) c^2\, dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_S}{r}} - r^2\big(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\big) \tag{1}$$

von $r = R > r_S$ nach $r = r_S$ mit verschwindender Anfangsgeschwindigkeit. Zeigen Sie mit Hilfe der in der Vorlesung abgeleiteten Bewegungsgleichungen, dass die Testmasse den Horizont $r = r_S$ nach der *endlichen* Eigenzeit

$$\tau = \frac{R}{c}\left\{\sqrt{1 - \frac{r_s}{R}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R}{r_S}}\left[\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{2r_S}{R} - 1\right)\right]\right\} \tag{2}$$

erreicht, dass dies aber nicht in endlicher Koordinatenzeit geschieht.

Aufgabe 2

Betrachten Sie nun eine nicht notwendig inertiale Bewegung eines Objekts im Bereich $0 < r < r_S$ und zeigen Sie, dass diese die Singularität $r = 0$ nach einer Eigenzeit trifft, die echt kleiner ist als

$$\tau_* = \frac{\pi}{2}\,\frac{r_S}{c}\,. \tag{3}$$

Wie viel Zeit verbleibt Ihnen also höchstens nach Passieren des Horizonts eines supermassiven schwarzen Lochs von 4 Millionen Sonnenmassen (vergleichbar dem im Zentrum der Milchstraße)?

Tipp: Gehen sie aus von der für jede zeitartige Bewegung gültigen Gleichung $g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta = c^2$. Schreiben Sie diese Bedingung für die Metrik (1) im Bereich $r < r_S$ an und leiten Sie daraus ab, dass $\dot{r}^2$ echt größer ist als $c^2\big((r/r_S) - 1\big)$.

Aufgabe 3

Die Metrik des 2-dimensionalen äquatorialen Schnitts $\theta = \pi/2$ durch den Raum $t =$ konst. in der Schwarzschildgeometrie (1) ist

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r_s}{r}} + r^2\, d\varphi^2\,. \tag{4}$$

Es ist leicht zu sehen (s. Vorlesung), dass diese Flächengeometrie durch folgende Einbettung des Kreisrings $Z := \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid r \in (r_S, \infty)\}$ in den $\mathbb{R}^3$ erhalten werden kann:

$$\vec{z}(r,\theta) = \left(r\,\cos\varphi\;,\; r\,\sin\varphi\;,\; 2r_s\sqrt{\frac{r}{r_s} - 1}\right) \tag{5}$$

Berechnen Sie nach dem bekannten Schema die Weingarten Abbildung und aus deren Eigenwerten die Gauß'sche Krümmung dieser Fläche.

Berechnen Sie den radialen geodätischen Abstand eines Punktes mit $r > r_S$ zur Fläche $r = r_S$. Zeigen Sie somit insbesondere, dass dieser endlich ist.

Aufgabe 4

Die *optische* Metrik des Raums $t =$ konst. in der Schwarzschildgeometrie ist

$$ds^2 = \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^2} + \frac{r^2}{1 - \frac{r_s}{r}}\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right). \tag{6}$$

Berechnen Sie auch hier den radialen geodätischen Abstand eines Punktes mit $r > r_S$ zur Fläche $r = r_S$. Welcher wesentliche Unterschied besteht zur Schwarzschildmetrik?

Zeigen Sie, dass die Sphären $r =$ konst. in der optischen Geometrie den Flächeninhalt

$$O(r) = \frac{4\pi r^2}{1 - \frac{r_s}{r}} \tag{7}$$

besitzen und dass unter ihnen genau eine Sphäre kleinsten Inhalts ist. Berechnen Sie deren Flächeninhalt in der optischen und in der räumlichen Schwarzschildgeometrie und vergleichen Sie diese. Skizzieren Sie nun qualitativ ein Einbettungsdiagramm des äquatorialen Schnitts $\theta = \pi/2$ für die optische Metrik im Bereich $r \in (r_s, \infty)$.