Übungen zur Vorlesung

Gravitationsphysik - Theoretischer Teil

von DOMENICO GIULINI

Blatt 8

Aufgabe 1

Der Energiesatz für eine Punktmasse m im Zentralpotential $V(r)$ mit Gesamtenergie E und Gesamtdrehimpuls $\vec{L} = L\vec{e}_z$ kann unter Ausnutzung von $mr^2\dot{\varphi} = L$ auf folgende Form gebracht werden:

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 \frac{L^2}{r^4} = 2m(E - V(r)) - \frac{L^2}{r^2} \tag{1}$$

Für das Newtonsche Potential $V(r) = -\alpha/r$ lässt sich dies nach vorübergehender Einführung von $u = 1/r$ leicht integrieren und man erhält

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \epsilon\cos\varphi} \tag{2a}$$

mit

$$p := \frac{L^2}{m\alpha} \quad \text{und} \quad \epsilon := \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}}\,, \tag{2b}$$

was bekanntlich eine Ellipse mit großer Halbachse $a = p/(1-\epsilon^2) = -\alpha/2E$ und Exzentrität ϵ beschreibt. $\varphi = 0$ entspricht dem Punkt größter Annäherung, dem *Periastron*. Dieser kehrt mit der Periodizität 2π wieder und ist daher ein fester Punkt im Raum; die Bahn ist also geschlossen.

Für allgemeines $V(r)$ wird die Bahn im Allgemeinen nicht geschlossen sein. Vielmehr gilt nach (1) für den Exzess $\Delta\varphi$ der Periastronwiederkehr

$$\begin{aligned} 2\pi + \Delta\varphi &= 2\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr\, L/r^2}{\sqrt{2m(E - V(r)) - L^2/r^2}} \\ &= -2\frac{\partial}{\partial L}\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} dr\,\sqrt{2m(E - V(r)) - L^2/r^2} \end{aligned} \tag{3}$$

Betrachten Sie nun das Potential $V(r) = -\frac{\alpha}{r} + \Delta V(r)$ mit ΔV als „kleiner Störung“. Leiten Sie in linearer Näherung aus (3) folgenden Ausdruck für $\Delta\varphi$ ab:

$$\Delta\varphi = m\frac{\partial}{\partial L}\left\{\frac{1}{L}\int_0^{2\pi} d\varphi\; r_*^2(\varphi; L, E)\,\Delta V(r_*(\varphi; L, E))\right\}\,, \tag{4}$$

wobei $r_*(\varphi; L, E)$ die Lösung (2a) zum ungestörten Potential $-\alpha/r$ zu den Werten L und E von Drehimpuls und Energie ist. Beachten Sie, dass der Term in den geschweiften Klammern als Funktion von L und E aufgefasst wird, so dass die partielle

Ableitung nach L bei konstantem E auszuführen ist. Berechnen Sie nun $\Delta\varphi$ für die Störungen der Form $\Delta V_2(r) = \delta_2/r^2$ und $\Delta V_3(r) = \delta_3/r^3$ und zeigen Sie, dass sich ausgedrückt durch die große Halbachse a und die Exzentrität ϵ der ungestörten Ellipse folgende Werte ergeben:

$$\Delta_2\varphi = -2\pi\delta_2 m L^{-2} = -2\pi \frac{\delta_2/\alpha}{a(1-\epsilon^2)}\,, \tag{5a}$$

$$\Delta_3\varphi = -6\pi\alpha\delta_3 m^2 L^{-4} = -6\pi \frac{\delta_3/\alpha}{a^2(1-\epsilon^2)^2}\,. \tag{5b}$$

(Achtung: Prinzipiell sind vor der partiellen Differentiation nach L die Parameter p und ϵ durch (2b) als Funktionen von L und E auszudrücken.)

Aufgabe 2

Die Sonne ist als Folge Ihrer Eigenrotation entlang ihrer Rotationsachse abgeplattet und besitzt dadurch ein Quadrupolmoment, das durch den dimensionslosen Parameter J_2 charakterisiert wird. Ihr Gravitationspotential wird dadurch modifiziert zu zu

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}\left(1 + J_2\,\frac{R^2}{2r^2}\,(1 - 3\cos^2\theta)\right)\,, \tag{6}$$

wobei R der Radius der Sonne und θ der Winkel zwischen Bahnebene und Äquatorialebene der Sonne ist. Benutzen Sie (5b) um die durch das Quadrupolmoment verursachte Periheldrehung $(\Delta\varphi)_{\text{Quad}}$ für Bahnen in der Äquatorialebene ($\theta = \pi/2$) zu bestimmen. Zeigen Sie damit, dass

$$\frac{(\Delta\varphi)_{\text{Quad}}}{(\Delta\varphi)_{\text{ART}}} = J_2 \cdot \left(\frac{R}{r_S}\right) \cdot \left(\frac{R}{a(1-\varepsilon^2)}\right)\,. \tag{7}$$

Die gemessenen Werte der Periheldrehung des Merkur stimmen mit $(\Delta\varphi)_{\text{ART}}$ bis auf 10^{-3} überein. Wie groß darf J_2 also höchstens sein, damit dies auch als Promille-Test der ART gewertet werden darf?