Übungen zur Vorlesung

Weiterführende Themen zur Speziellen Relativitätstheorie und relativistischen Feldtheorie

von DOMENICO GIULINI

Blatt 1

Aufgabe 1 (Allgemeines semidirektes Produkt)

Seien H und G Gruppen und $\alpha : G \to \mathrm{Aut}(H)$, $g \mapsto \alpha_g$, ein Homomorphismus der Gruppe G in die Automorphismengruppe von H. Auf der Menge $H \times G$ betrachte man nun folgende Multiplikationsvorschrift

$$(h_1, g_1)(h_2, g_2) = (h_1 \alpha_{g_1}(h_2)\,,\; g_1 g_2)\,. \tag{1}$$

Machen Sie sich zunächst klar, dass die rechte Seite sinnvoll ist. (Welche Multiplikationen beziehen sich auf H, welche auf G?) Zeigen Sie, dass (1) eine Gruppenstruktur definiert. Die Menge $H \times G$ versehen mit dieser Struktur bezeichnet man mit $H \rtimes_\alpha G$ und nennt sie das semidirekte Produkt von H mit G bezüglich α. [Oft nennt man α nicht explizit, wenn es sich aus irgendwelchen Gründen von selbst versteht, welches α gemeint ist.]

Zeigen Sie weiter, dass H und G in natürlicher Weise Untergruppen von $H \rtimes_\alpha G$ sind, wobei H sogar invariant (d.h. normale Untergruppe) ist. Unter welchen Bedingungen an α ist auch G invariant? Was ist der mengentheoretische Durchschnitt dieser Untergruppen?

Zeigen Sie zuletzt folgende Umkehrung: Ist F eine Gruppe mit Untergruppen H und G. Dann ist F isomorph zum einem semi-direkten Produkt $H \rtimes_\alpha G$ mit einem nicht weiter spezifizierten $\alpha : G \to \mathrm{Aut}(H)$ wenn H normal (invariant) ist, $F = HG := \{gh \mid g \in G, \quad h \in H\}$ und $H \cap G = \{e\}$, wobei $e \in F$ das neutrale Element ist.

Aufgabe 2 (Spezielles semidirektes Produkt)

Im Folgenden stehe $\mathbb{K}$ für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Sei H die additive Gruppe $\mathbb{K}^n$ und $G \subset GL(n, \mathbb{K})$ eine Untergruppe der Gruppe aller invertierbaren $n \times n$ Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{K}$. Als Abbildung α nimmt man die Identität, was sinnvoll ist, da $\mathrm{Aut}(\mathbb{K}^n) \cong GL(n, \mathbb{K})$. Wir schreiben $\alpha_A(a) =: A \cdot a$ (Multiplikation des Vektors a mit der Matrix A.) Das semidirekte Produkt $\mathbb{K}^n \rtimes G$ ist nun gegeben durch

$$(a_1, A_1)(a_2, A_2) = (a_1 + A_1 \cdot a_2\,,\; A_1 \cdot A_2)\,. \tag{2}$$

Man nennt $\mathbb{K}^n \rtimes G$ auch oft die zu $G \subset GL(n, \mathbb{K})$ gehörige inhomogene Gruppe IG.

Zeigen Sie, dass die Abbildung $\mathbb{K} \rtimes G \to GL(n+1, \mathbb{K})$, gegeben durch

$$(a, A) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0^\top \\ a & A \end{pmatrix} \tag{3}$$

ein injektiver Homomorphismus (eine Einbettung) ist. Dabei ist die Matrix auf der rechten Seite 1+n zerlegt, wobei $0^\top$ der n dimensionale Null-Zeilenvektor ist.

Aufgabe 3 (Galilei Gruppe)

Die eigentliche orthochrone (keine Raum- und keine Zeitspiegelungen) inhomogene Galilei Gruppe $IGal_+^\uparrow$ ist das semidirekte-direkte Produkt der eigentlich orthochronen homogenen Galilei Gruppe $Gal_+^\uparrow$ mit der Gruppe $\mathbb{R}^4$ raumzeitlicher Translationen. $Gal_+^\uparrow \subset GL(4, \mathbb{R})$ wird parametrisiert durch räumliche Drehungen

$$R(\mathbf{D}) := \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^\top \\ \vec{0} & \mathbf{D} \end{pmatrix}, \quad \text{wobei} \quad \mathbf{D} \in SO(3) \tag{4}$$

und Geschwindigkeitstransformationen (engl. „Boosts“)

$$B(\vec{v}) := \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^\top \\ \vec{v} & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \text{wobei} \quad \vec{v} \in \mathbb{R}^3 . \tag{5}$$

Die allgemeine Transformation in $Gal_+^\uparrow$ ist dann gegeben durch

$$G(\vec{v}, \mathbf{D}) := B(\vec{v}) \cdot R(\mathbf{D}) . \tag{6}$$

Berechnen Sie $G(\vec{v}_1, \mathbf{D}_1) \cdot G(\vec{v}_2, \mathbf{D}_2)$ und stellen Sie dadurch die Gruppenmultiplikation in den Parametern $\vec{v}$ und $\mathbf{D}$ dar. Zeigen Sie, dass

$$Gal_+^\uparrow \cong \mathbb{R}^3 \rtimes SO(3) . \tag{7}$$

Welchen Transformationen entspricht hier der Abel'sche Normalteiler $\mathbb{R}^3$? Also gilt

$$IGal_+^\uparrow \cong \mathbb{R}^4 \rtimes (\mathbb{R}^3 \rtimes SO(3)) . \tag{8}$$

Schreiben Sie ein allgemeines Element von $IGal_+^\uparrow$ anhand der Einbettung $IGal_+^\uparrow \hookrightarrow GL(5, \mathbb{R})$ als 5×5 Matrix an.

Aufgabe 4 (Affine Gruppen und semi-direkte Produkte)

Ein n-dimensionaler reeller affiner Raum ist ein Tripel (M, V, Φ), wobei V ein n-dimensionaler reeller Vektorraum ist, M ein Menge und $\Phi : V \times M \to M$ eine einfach transitive Aktion von V (hier als Abel'sche Gruppe verstanden) auf M. Für $p \in M$ und $v \in V$ schreibt man für $\Phi(v, p)$ auch oft $v+p$ oder $p+v$. Für $p, q \in M$ schreibt man für das eindeutig bestimmte $v \in V$ für das $p + v = q$ gilt auch oft $v = q - p$. In diesem Sinne koennen Differenzen von Elementen in M gebildet werden (mit Werten in V) und Summen von Elementen in M mit Elementen in V, aber nicht Summen von Elementen in M untereinander.

Seien (M, V, Φ) uns (M', V', Φ') zwei reele affine Räume nicht notwendig gleicher Dimension. Eine Abbildung $F : M \to M'$ heisst *affin* genau dann, wenn es eine lineare Abbildung $f : V \to V'$ gibt, so dass

$$F \circ \Phi = \Phi' \circ f \times F. \tag{9}$$

Das bedeutet, dass für alle $p \in M$ und alle $v \in V$ gilt:

$$F(\Phi(v, p)) = \Phi'(f(v), F(p)). \tag{10}$$

Verwendet man für beide Aktionen Φ und Φ' die obige Schreibweise mit einem $+$, so wird (10) einfach zu

$$F(p + v) = F(p) + f(v) \tag{11}$$

Beachte aber, dass sich das linke $+$ Zeichen auf die Aktion Φ bezieht und das rechte auf die Aktion Φ'. Gleichung (11) besagt gerade, dass eine Abbildung genau dann affin ist wenn ihre Einschränkungen auf alle Geraden affin sind.

Sei $\Delta : M \times M \to V$ die Differenz-Abbildung, die jedem Tupel (p, q) die Differenz $p - q \in V$ zuordnet. Genauso sei $\Delta' : M' \times M' \to V'$ die Differenz-Abbildung des zweiten affinen Raums. Zeigen Sie, dass die Abbildung $F : M \to M'$ genau dann affin ist, wenn es eine lineare Abbildung $f : V \to V'$ gibt mit

$$\Delta' \circ F \times F = f \circ \Delta. \tag{12}$$

Zeigen Sie, dass die affinen Bijektionen eines affinen Raums (M, V, Φ) auf sich selbst eine Gruppe $\mathrm{GA}(M)$ bilden ("GA" für "General Affine") und dass die Abbildung $T : V \to \mathrm{GA}(M)$, $w \mapsto T_w$ mit $T_w(p) := p + w$, die Abel'sche Gruppe V als normale Untergruppe in $\mathrm{GA}(M)$ einbettet. Man nennt Sie die Untergruppe der Translationen. Zeigen Sie weiter, dass der Quotient $\mathrm{GA}(M)/T(V)$ isomorph zur Gruppe $\mathrm{GL}(V)$ ("GL" für "General Linear") der invertierbaren linearen Transformationen von V ist und dass jeder Punkt $o \in M$ eine Einbettung $i_o : \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GA}(M)$ definiert durch $i_o(f)(p) := o + f(p - o)$. Zeigen Sie damit die Isomorphie

$$\mathrm{GA}(M) \cong V \rtimes \mathrm{GL}(V) \tag{13}$$

und diskutieren Sie deren Abhängigkeit von der Wahl des Punktes o. Wie ändert sich das Bild von $\mathrm{GL}(V)$ unter i_o in $\mathrm{GA}(M)$ bei Änderung von o?