Übungen zur Vorlesung

Weiterführende Themen zur Speziellen Relativitätstheorie und relativistischen Feldtheorie

von DOMENICO GIULINI

Blatt 2

Aufgabe 1

Wir definieren

$$\mathrm{SO}(3) := \{D \in \mathrm{Mat}(3,\mathbb{R}) : DD^\top = E^{(3)}\,, \det(D) = 1\}\,. \tag{1}$$

(Hier und im Folgenden bezeichnet $E^{(n)}$ die $n \times n$ Einheitsmatrix.) Zeigen Sie, dass die Lie-Algebra $\mathrm{Lie}(\mathrm{SO}(3))$ durch den 3-dimensionalen rellen Vektorraum der antisymmetrischen 3×3 Matrizen gegeben ist, und dass die drei Matrizen λ_a, $a = 1, 2, 3$, mit den Komponenten $(\lambda_a)_{bc} = -\varepsilon_{abc}$ eine Basis bilden für die gilt

$$[\lambda_a\,,\, \lambda_b] = \varepsilon_{abc}\,\lambda_c\,. \tag{2}$$

Betrachten Sie die symmetrische Bilinearform auf $\mathrm{Lie}(\mathrm{SO}(3))$

$$g(X,Y) = -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Spur}(\mathrm{ad}_X \circ \mathrm{ad}_Y) \tag{3}$$

und zeigen Sie, dass diese positiv definit ist und dass die Vektoren λ_a bezüglich g orthonormiert sind.

Zeigen Sie weiter, dass der Wert der Exponentialfunktion

$$D(\vec{\alpha}) := \exp(\alpha_a \lambda_a) \tag{4}$$

in $\mathrm{SO}(3)$ liegt und einer (aktiven) orthogonalen Drehung um den Winkel $\alpha := \sqrt{\alpha_a \alpha_a}$ mit orientierter Drehachse $\vec{n} := \vec{\alpha}/\alpha$ entspricht.

Tipp: Zeigen Sie zuerst, dass $\vec{\alpha}\cdot\vec{\lambda}(\vec{x}) = \vec{\alpha}\times\vec{x}$ und somit $\big(\vec{\alpha}\cdot\vec{\lambda}\big)^2 = -\alpha^2\,P_\perp$, wobei $P_\perp := \big(\mathrm{Id} - \vec{n}\otimes\vec{n}\big)$ der Projektor auf den Orthogonalraum zu $\vec{n}$ ist. Werten Sie damit die Exponentialreihe (4) aus, indem Sie gerade und ungerade Potenzen zusammenfassen. Zeigen Sie, dass Sie das Ergebnis so darstellen können:

$$D(\vec{\alpha}) := P_\parallel + \big[\cos(\alpha)\,\mathrm{Id} + \sin(\alpha)\,\vec{n}\cdot\vec{\lambda}\big] \circ P_\perp\,, \tag{5}$$

wobei $P_\parallel := E^{(3)} - P_\perp$ und $E^{(3)}$ die 3×3 Einheitsmatix ist. Machen Sie sich den Inhalt dieser Gleichung geometrisch klar und auch, dass damit die folgende Identität über die Exponentialfunktion in $\mathrm{Lie}(\mathrm{SO}(3))$ gezeigt ist ($r = \sqrt{g(X,X)}$)

$$\exp(X) = P_\parallel + \left[E^{(3)}\cos(r) + X\frac{\sin(r)}{r}\right] \circ P_\perp\,. \tag{6}$$

Aufgabe 2

Für $a = 1, 2, 3$ seien σ_a die Pauli-Matrizen:

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Zeigen Sie, dass diese die folgenden (nützlichen) Relationen erfüllen:

$$\sigma_a\sigma_b = \delta_{ab}E^{(2)} + i\varepsilon_{abc}\sigma_c\,, \tag{8a}$$

$$\sigma_a\sigma_b\sigma_c = i\varepsilon_{abc}\,E^{(2)} + \delta_{ab}\sigma_c + \delta_{bc}\sigma_a - \delta_{ac}\sigma_b\,. \tag{8b}$$

Folgern Sie daraus, dass für jedes $M \in \mathrm{Mat}(2,\mathbb{C})$ gilt (hier gilt die Summenkonvention, d.h. es ist über a zu summieren)

$$\sigma_a M \sigma_a = 2\,E^{(2)}\,\mathrm{Spur}(M) - M\,. \tag{9}$$

[Tipp: Nutzen Sie die Tatsache, dass die Pauli Matrizen zusammen mit der Einheitsmatrix eine Basis von $\mathrm{Mat}(2,\mathbb{C})$ über $\mathbb{C}$ bilden, d.h. $M = E^{(2)}M_0 + M_a\sigma_a$ geschrieben werden kann.]

Aufgabe 3

Wir definieren

$$SU(2) := \{A \in \mathrm{Mat}(2,\mathbb{C}) : AA^\dagger = E^{(2)},\ \det(A) = 1\}. \tag{10}$$

Zeigen Sie

$$SU(2) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \;:\; a, b \in \mathbb{C},\ |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\} \tag{11}$$

und daraus, dass $SU(2)$ als tolologischer Raum homöomorph zu S^3 ist. Rechnen Sie nach, dass

$$\begin{aligned} A(\vec{\alpha}) : &= \exp\left(-\tfrac{i}{2}\vec{\alpha}\cdot\vec{\sigma}\right) \\ &= E^{(2)}\,\cos(\alpha/2) - i\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\,\sin(\alpha/2)\,. \end{aligned} \tag{12}$$

Warum ist dies in $SU(2)$? [Wie in Aufgabe 1 ist $\alpha := \sqrt{\alpha_a\alpha_a}$ und $\vec{n} = \vec{\alpha}/\alpha$.]

Zeigen Sie mit Hilfe von (8), dass

$$A(\alpha)(\vec{x}\cdot\vec{\sigma})A^\dagger(\alpha) = (D(\alpha)\vec{x})\cdot\vec{\sigma} \tag{13a}$$

mit $D(\alpha)$ wie in (5). Folgern Sie daraus

$$A(\alpha)\sigma_b A^\dagger(\alpha) = [D(\alpha)]_{ab}\sigma_a\,. \tag{13b}$$

Zeigen Sie, dass die durch (13) definierte Abbildung

$$\pi : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)\,, A \mapsto \pi(A) := D \tag{14}$$

gegeben ist durch

$$[\pi(A)]_{ab} := D_{ab} = \tfrac{1}{2}\mathrm{Spur}(A\sigma_a A^\dagger \sigma_b) \tag{15}$$

und einen surjektiven Gruppenhomomorphismus mit $\mathrm{Kern}(\pi) = \pm E^{(2)}$ definiert. Zeigen Sie weiter mit Hilfe von (9), dass zu gegebenen $D \in \mathrm{SO}(3)$ mit $\mathrm{Spur}(D) \neq -1$ (d.h. ausgenommen Drehungen um Winkel $\neq 180°$) das Urbild $\pi^{-1}(D) \subset \mathrm{SU}(2)$ gegeben ist durch

$$\pi^{-1}(D) = \pm\frac{E^{(2)} + D_{ab}\sigma_a\sigma_b}{2\sqrt{1+\mathrm{Spur}(D)}}\,. \tag{16}$$

Wenn $\mathrm{SU}(2)$ homöomorph zu S^3 ist (als topologischer Raum), wie kann man sich dann $\mathrm{SO}(3)$ topologisch vorstellen?

Aufgabe 4

Zeigen sie, dass die Lie-Algebra $\mathrm{Lie}(\mathrm{SU}(2))$ der Gruppe $\mathrm{SU}(2)$ durch den 3-dimensionalen reellen Vektorraum der anti-Hermite'schen spurlosen 2×2 Matrizen über $\mathbb{C}$ gegeben ist und dass die $e_a := -\frac{i}{2}\sigma_a$ eine Basis bilden, wobei

$$[e_a, e_b] = \varepsilon_{abc}e_c\,. \tag{17}$$

Betrachten Sie die symmetrische Bilinearform auf $\mathrm{Lie}(\mathrm{SU}(2))$

$$g(X,Y) = -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Spur}(\mathrm{ad}_X \circ \mathrm{ad}_Y) \tag{18}$$

und zeigen Sie, dass diese positiv definit ist und dass die Vektoren e_a bezüglich g orthonormiert sind.

Betrachten Sie die adjungierte Darstellung der Gruppe $\mathrm{SU}(2)$

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad} : \mathrm{SU}(2) &\to \mathrm{GL}(\mathrm{Lie}(\mathrm{SU}(2))) \\ A &\mapsto (X \mapsto AXA^{-1} := \mathrm{Ad}_A(X)) \end{aligned} \tag{19}$$

und die dadurch induzierte Darstellung der Lie-Algebra

$$\begin{aligned} \mathrm{ad} : \mathrm{Lie}(\mathrm{SU}(2)) &\to \mathrm{End}(\mathrm{Lie}(\mathrm{SU}(2))) \\ X &\mapsto (Y \mapsto [X,Y] := \mathrm{ad}_x(Y))\,. \end{aligned} \tag{20}$$

Die Darstellungseigenschaft für (20) besagt gerade

$$\mathrm{ad}_{[X,Y]} = \mathrm{ad}_X \circ \mathrm{ad}_Y - \mathrm{ad}_Y \circ \mathrm{ad}_X\,. \tag{21}$$

Zeigen Sie, dass dies gerade der äquivalent der Jacobi-Identität ist. Zeigen Sie mit Hilfe von (21), dass alle ad_X bezüglich g antisymmetrisch sind, dass also für alle $X, Y, Z \in \mathrm{Lie}(SU(2))$ gilt

$$g\big(\mathrm{ad}_X(Y), Z\big) = -g\big(Y, \mathrm{ad}_X(Z)\big)\,. \tag{22}$$

Schließen Sie aus (13), dass die adjungierte Darstellung der $SU(2)$ orthogonal bezüglich g ist. Was hat das mit (22) zu tun?

Zeigen Sie, dass (12) äquivalent is zu ($r = \sqrt{g(X,X)}$)

$$\exp(X) = E^{(2)}\,\cos(r/2) + X\,\frac{\sin(r/2)}{r/2}\,. \tag{23}$$

Vergleichen Sie das mit (6).