Übungen zur Vorlesung

Weiterführende Themen zur Speziellen Relativitätstheorie und relativistischen Feldtheorie

von DOMENICO GIULINI

Blatt 3

Aufgabe 1

Wir parametrisieren eine eigentlich orthochrone Lorentz-Transformation $L \in \mathrm{Lor}_+^\uparrow$ durch $\gamma \in \mathbb{R}$, $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ und $M \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ wie folgt:

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & \vec{a}^\top \\ \vec{b} & M \end{pmatrix} . \tag{1}$$

Rechnen Sie nach, dass die Bedingungen $L^\alpha_\mu L^\beta_\nu \eta^{\mu\nu} = \eta^{\alpha\beta}$ und $L^\mu_\alpha L^\nu_\beta \eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta}$, wobei $\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$, folgenden Relationen äquivalent sind:

$$\gamma^2 = 1 + \vec{a}^2 , \tag{2a}$$

$$\vec{b} = \gamma^{-1} M \vec{a} , \tag{2b}$$

$$M M^\top = E^{(3)} + \vec{b} \otimes \vec{b}^\top , \tag{2c}$$

und

$$\gamma^2 = 1 + \vec{b}^2 , \tag{3a}$$

$$\vec{a} = \gamma^{-1} M^\top \vec{b} , \tag{3b}$$

$$M^\top M = E^{(3)} + \vec{a} \otimes \vec{a}^\top . \tag{3c}$$

Zeigen Sie, dass gilt

$$L = BR , \tag{4a}$$

mit

$$B = \begin{pmatrix} \gamma & \vec{b}^\top \\ \vec{b} & E^{(3)} + \frac{\vec{b} \otimes \vec{b}^\top}{1+\gamma} \end{pmatrix} , \tag{4b}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^\top \\ \vec{0} & M - \frac{\vec{b} \otimes \vec{a}^\top}{1+\gamma} \end{pmatrix} . \tag{4c}$$

Zeigen Sie nun weiter: B ist ein Boost mit Geschwindigkeit $\vec{v}$, die folgender Gleichung genügt

$$\vec{\beta} := \vec{v}/c = \gamma^{-1}\vec{b} \tag{5}$$

und

$$D := M - \frac{\vec{b} \otimes \vec{a}^\top}{1+\gamma} \tag{6}$$

ist eine spezielle orthogonale Drehung (d.h. $D \in SO(3)$) mit Drehwinkel θ die folgenden Bedingungen genügt:

$$D\vec{a} = \vec{b} \tag{7}$$

und

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\Big(\mathrm{Spur}(M) - 1 - (\gamma - 1)\cos\varphi\Big)\,, \tag{8}$$

wobei φ der zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossene Winkel ist. Können Sie alle $D \in SO(3)$ angeben die für gegebene Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gleichen Betrages Gleichung (7) erfüllen? Welche nicht bereits durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ determinierte Freiheiten bleiben in der Wahl von M wenn man (7) und (8) berücksichtigt?

Aufgabe 2

Wir betrachten die Kombination zweier Boosts $B(\vec{\beta}_a)$, $a = 1, 2$, mit

$$B(\vec{\beta}_a) = \begin{pmatrix} \gamma_a & \gamma_a\vec{\beta}_a^\top \\ \gamma_a\vec{\beta}_a & E^{(3)} + (\gamma_a - 1)\vec{n}_a \otimes \vec{n}_a^\top \end{pmatrix}\,, \tag{9}$$

wobei $\vec{n}_a := \vec{\beta}_a/\|\vec{\beta}_a\|$ (keine Summation über a in $n_a \otimes \vec{n}_a^\top$) und $\gamma_a := 1/\sqrt{1 - \|\vec{\beta}_a\|^2}$. Zerlegen Sie nach dem Muster von Aufgabe 1 das Produkt polar:

$$B(\vec{\beta}_1)B(\vec{\beta}_2) = B\big(\beta_1 * \beta_2\big)\ R\big(T[\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2]\big)\,. \tag{10}$$

Dabei haben wir die Boostgeschwindigkeit der kombinierten Transformation mit $\vec{\beta}_1 * \vec{\beta}_2$ bezeichnet und die Drehmatrix in SO(3) mit $T[\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2]$.

Zeigen Sie, dass der zu $\vec{\beta}_1 * \vec{\beta}_2$ gehörige γ-Faktor gegeben ist durch

$$\gamma = \gamma_1\gamma_2(1 + \vec{\beta}_1 \cdot \vec{\beta}_2) \tag{11}$$

und dass

$$\vec{\beta}_1 * \vec{\beta}_2 = \frac{\vec{\beta}_1 + (\vec{\beta}_2)_\| + \gamma_1^{-1}(\vec{\beta}_2)_\perp}{1 + \vec{\beta}_1 \cdot \vec{\beta}_2} \tag{12}$$

und

$$\vec{\beta}_1 * \vec{\beta}_2 = T[\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2](\vec{\beta}_2 * \vec{\beta}_1)\,. \tag{13}$$

Dabei bezeichnen $(\vec{\beta}_2)_\parallel$ und $(\vec{\beta}_2)_\perp$ die gewöhnlichen orthogonalen Projektionen von $\vec{\beta}_2$ parallel und senkrecht zu $\vec{\beta}_1$. Zeigen Sie auch, dass $T[\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2]$ eine Drehung in der von $\vec{\beta}_1$ und $\vec{\beta}_2$ aufgespannten Ebene ist deren Drehwinkel θ den Gleichungen genügt

$$\begin{aligned}\cos\theta &= 1 - \frac{(\gamma_1 - 1)(\gamma_2 - 1)}{\gamma - 1}\,\sin^2\varphi \\ &= \frac{(1+\gamma+\gamma_1+\gamma_2)^2}{(1+\gamma)(1+\gamma_1)(1+\gamma_2)} - 1\,,\end{aligned} \tag{14}$$

wobei φ der zwischen $\vec{\beta}_1$ und $\vec{\beta}_2$ eingeschlossene Winkel ist.

Aufgabe 3

Mit $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ definieren wir

$$SL(2,\mathbb{F}) := \{A \in GL(2,\mathbb{F}) : \det(A) = 1\}\,. \tag{15}$$

Zeigen Sie, dass die drei Matrizen

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\,, \quad e_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\,, \quad e_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{16}$$

eine Basis von $\mathrm{Lie}(SL(2,\mathbb{F}))$ über $\mathbb{F}$ bilden und das diese folgenden Relationen genügt

$$[e_+, e_-] = h\,, \quad [h, e_\pm] = \pm 2e_\pm\,. \tag{17}$$

Zeigen Sie die Einfachheit von $\mathrm{Lie}(SL(2,\mathbb{F}))$, d.h., dass keine nicht-trivialen Ideale (Lie-Untergalgebren $I \subset L := \mathrm{Lie}(SL(2,\mathbb{F}))$ mit $[I, L] \subseteq I$) existieren.

Tipp: Ist I Ideal und $X \in I$, dann sind auch $[X, h]$ und $[X, e_\pm]$ in I. Setzen Sie $X = ae_+ + be_- + ch$ und nutzen Sie aus, dass z.B. $[e_+, [e_+, X]] = -2be_+$ und $[e_-, [e_-, X]] = -2ae_-$. Zeigen Sie so, dass wenn $a \neq 0$ oder $b \neq 0$ folgt, dass $I = \mathrm{Lie}(SL(2,\mathbb{F}))$. Sind $a = b = 0$ aber $c \neq 0$ so folgt das Gleiche; warum? Also sind $I = \mathrm{Lie}(SL(2,\mathbb{F}))$ oder $I = \{0\}$ die einzigen Möglichkeiten.

Sei $T : \mathrm{Lie}(SL(2,\mathbb{F})) \to \mathrm{Lie}(U(n))$ ein Homomorphismus von Lie-Algebren. Dabei bezeichnet $U(n)$ die Lie-Gruppe der unitären $n\times n$ Matrizen und $\mathrm{Lie}(U(n))$ ihre Lie-Algebra der anti-Hermite'schen $n \times n$ Matrizen. Wir schreiben $T(X) = \hat{X}$ usw. Zeigen Sie

$$\mathrm{Spur}(\hat{e}_+^2) = 0\,. \tag{18}$$

(Tipp: schreiben Sie $\hat{e}_+^2 = \frac{1}{2}\hat{e}_+[\hat{h}, \hat{e}_+]$ und nutzen Sie die zyklische Invarianz der Spur.)

Folgern Sie daraus $\hat{e}_+ = 0$, also $e_+ \in \mathrm{Kern}(T)$. Folgern Sie weiter, dass $\mathrm{Kern}(T) = \mathrm{Lie}(SL(2,\mathbb{F}))$ (Tipp: der Kern eines Lie-Algebren Homomorphismus ist immer ein Ideal.) Also ist T die Nullabbildung.

Nun ist $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$ zusammenhängend. Beweisen Sie somit (in weniger als zwei Zeilen!), dass $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$ keine nicht-trivialen endlichdimensionalen unitären Darstellungen besitzt, und dass dies dann auch für die Einheitskomponente der Lorentzgruppe zutrifft. Was impliziert dies für die volle Lorentzgruppe (Einschluss aller Komponenten)?