Übungen zur Vorlesung

Weiterführende Themen zur Speziellen Relativitätstheorie und relativistischen Feldtheorie

von DOMENICO GIULINI

Blatt 4

Aufgabe 1

Wir betrachten einen 4-dimensionalen reellen Vektorraum V mit Minkowski'schen Skalarprodukt η (Signatur $(+,-,-,-)$). Die Lorentzgruppe Lor ist definiert als die Gruppe der η erhaltenden linearen Isomorphismen von V,

$$\mathrm{Lor} = \left\{ L \in \mathrm{GL}(V) : \eta(Lv, Lw) = \eta(v,w); \quad \forall v, w \in V \right\}. \tag{1}$$

Diese wird auch manchmal die orthogonale Gruppe von V bezüglich η genannt und mit $\mathrm{O}(V,\eta)$ bezeichnet. Ihre Lie-Algebra ist der Vektorraum aller bezüglich η antisymmetrischen Endomorphismen von V,

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{Lor}) = \left\{ X \in \mathrm{End}(V) : \eta(Xv, w) = -\eta(v, Xw), \quad \forall v, w \in V \right\}, \tag{2}$$

die auch mit $\mathrm{o}(V,\eta)$ bezeichnet wird. Letztere kann mit dem Vektorraum $V \wedge V$ identifiziert werden, wenn man das Element $x \wedge y \in V \wedge V$ als Endomorphismus

$$v \to x\eta(y,v) - y\eta(x,v) \tag{3}$$

auffasst und diese Beziehung linear auf ganz $V \wedge V$ fortsetzt. Das Lie-Produkt ist einfach der Kommutator in $\mathrm{End}(V)$. Wählt man eine Basis $\{e_1, \cdots, e_n\}$ von V, so kann man mit obiger Identifikation dafür in Komponenten schreiben:

$$[X,Y]^{ab} = \eta_{nm}\big(X^{an}Y^{mb} - Y^{an}X^{mb}\big). \tag{4}$$

Die Metrik $\eta \in V^* \otimes V^*$ auf V definiert in der üblichen Weise eine Metrik $\eta^{-1} \in V \otimes V$ gleicher Signatur auf V^* und eine Volumenform $\varepsilon \in \bigwedge^4 V^*$. Machen Sie sich die koordinatenfreien Definitionen dieser zwei eindeutig zugeordneten Strukturen klar und rekapitulieren sie die Definition der Hodge-Dualitätsabbildung $\star$. Letztere hat auf $V \wedge V$ in Komponenten die Form

$$(\star X)^{ab} = \tfrac{1}{2}\eta^{ac}\eta^{bd}\varepsilon_{cdnm}X^{nm}. \tag{5}$$

Zeigen Sie, dass ihr Quadrat das Negative der Identitätsabbildung ist. Zeigen Sie weiter, dass

$$\star[X,Y] = [\star X, Y] = [X, \star Y] \tag{6}$$

Tipp: Beweisen Sie zuerst $\star[\star X, Y] = -[X, Y]$ und nutzen Sie dann $\star \circ \star = -\mathrm{Id}$.

Betrachten Sie nun die Komplexifizierung $\mathrm{Lie}_{\mathbb{C}}(\mathrm{Lor}) := \mathbb{C} \otimes \mathrm{Lie}(\mathrm{Lor})$ die Sie mit $V_{\mathbb{C}} \wedge V_{\mathbb{C}}$ identifizieren ($V_{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \otimes V$). Zeigen Sie mit Hilfe von (6), dass die zwei linearen Selbstabbildungen von $\mathrm{Lie}_{\mathbb{C}}(\mathrm{Lor})$ (i bezeichnet einfach die imaginäre Einheit),

$$P^{(\pm)} := \tfrac{1}{2}(\mathrm{Id} \mp i\star)\,, \tag{7}$$

Projektoren auf Ideale in $\mathrm{Lie}_{\mathbb{C}}(\mathrm{Lor})$ sind, so dass mit $\mathrm{Lie}_{\mathbb{C}}^{(\pm)}(\mathrm{Lor}) = P^{(\pm)}(\mathrm{Lie}_{\mathbb{C}}(\mathrm{Lor}))$ gilt

$$\mathrm{Lie}_{\mathbb{C}}(\mathrm{Lor}) = \mathrm{Lie}_{\mathbb{C}}^{+}(\mathrm{Lor}) \oplus \mathrm{Lie}_{\mathbb{C}}^{-}(\mathrm{Lor})\,. \tag{8}$$

Dabei ist $\mathrm{Lie}_{\mathbb{C}}^{(\pm)}(\mathrm{Lor})$ Eigenraum zu $\star$ zum Eigenwert $\pm i$. Zeigen Sie auch, dass diese Eigenräume η-orthogonal sind. Beweisen Sie schließlich, dass jedes Ideal $\mathrm{Lie}_{\mathbb{C}}^{(\pm)}(\mathrm{Lor})$ isomorph zur komplexifizierten Lie-Algebra $\mathbb{C} \otimes \mathrm{Lie}(SU(2))$ ist. Da $\mathrm{Lie}(\mathrm{Lor})$ isomorph zu $\mathrm{Lie}(SL(2,\mathbb{C}))$ ist, kann man schreiben

$$\mathrm{Lie}_{\mathbb{C}}(SL(2,\mathbb{C})) \cong \mathrm{Lie}_{\mathbb{C}}(SU(2)) \oplus \mathrm{Lie}_{\mathbb{C}}(SU(2))\,. \tag{9}$$

Machen Sie sich klar, dass diese Gleichung ohne das angehängte $\mathbb{C}$ ganz unsinnig wäre.

Aufgabe 2

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Lie Algebra der Lorentzgruppe mit Hilfe der Erzeugenden von Boosts $B_a = M_{a0}$ und Rotationen $R_a = \frac{1}{2}\epsilon_{abc}M_{bc}$ die Form bekommt (hier ist ε_{abd} nur als vollständig antisymmetrisches kombinatorisches Symbol mit Normierung $\varepsilon_{123} = 1$ zu verstehen):

$$[R_a, R_b] = \varepsilon_{abc}R_c\,, \tag{10a}$$
$$[R_a, B_b] = \varepsilon_{abc}B_c\,, \tag{10b}$$
$$[B_a, B_b] = -\varepsilon_{abc}R_c\,. \tag{10c}$$

Zeigen Sie, dass die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} P : \mathrm{Lie}(\mathrm{Lor}) &\to \mathrm{Lie}(\mathrm{Lor})\,,\\ (R_1, R_2, R_3, B_1, B_2, B_3) &\mapsto (R_1, R_2, R_3, -B_1, -B_2, -B_3)\,, \end{aligned} \tag{11}$$

ein Automorphismus von $\mathrm{Lie}(\mathrm{Lor})$ definiert. Wir nennen ihn „Paritätstransformation“.

Betrachten Sie folgenden vier Elemente der Lie Algebra

$$\begin{aligned} X_1 &:= B_1 + R_2\,,\\ X_2 &:= B_2 - R_1\,,\\ X_3 &:= R_3\,,\\ X_4 &:= B_3\,. \end{aligned} \tag{12}$$

Zeigen Sie, dass die folgenden vier Unterräume Lie-Unteralgebren sind:

$$\mathsf{T}(2) := \mathsf{Span}\{X_1, X_2\}\,, \tag{13a}$$

$$\mathsf{E}(2) := \mathsf{Span}\{X_1, X_2, X_3\}\,, \tag{13b}$$

$$\mathsf{Hom}(2) := \mathsf{Span}\{X_1, X_2, X_4\}\,, \tag{13c}$$

$$\mathsf{Sim}(2) := \mathsf{Span}\{X_1, X_2, X_3, X_4\}\,. \tag{13d}$$

Zeigen Sie: Die kleinste Lie-Unteralgebra von $\mathsf{Lie}(\mathrm{Lor})$, die $\mathsf{T}(2)$ enthält und unter Paritätstransformationen abgeschlossen ist, ist $\mathsf{Lie}(\mathrm{Lor})$ selbst.

Erinnern Sie sich daran, dass in $\mathsf{Lie}(SL(2,\mathbb{C}))$ die Basiselemente R_a und B_a den 2×2 Matrizen $-\frac{i}{2}\sigma_a$ und $\frac{1}{2}\sigma_a$ entsprechen. (Achtung: Die Lie-Algebra ist reell; und über $\mathbb{R}$ sind die Matrizen σ_a und $i\sigma_a$ linear unabhängig.) Drücken Sie damit $X_1, \cdots, X_4$ in $\mathsf{Lie}(SL(2,\mathbb{C}))$ aus und zeigen Sie, dass $\mathsf{Sim}(2)$ in $SL(2,\mathbb{C})$ die Untergruppe der unteren Dreiecksmatrizen erzeugt. Charakterisieren Sie ebenfalls die $\mathsf{Hom}(2)$, $\mathsf{E}(2)$ und $\mathsf{T}(2)$ entsprechen Untergruppen von $SL(2,\mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass die von $\mathsf{Sim}(2)$ in $\mathrm{Lor}_+^\uparrow$ erzeugte Untergruppe die Stabilisatorgruppe eines Lichtstrahls durch den Ursprung in 3-Richtung ist, d.h. diesen als Menge (nicht punktweise!) invariant lässt, und dass $\mathsf{E}(2)$ diesen sogar punktweise fixiert.

Aufgabe 3

Der $3 \leq n$-dimensionale Minkowskiraum ist der n-dimensionaler affine Raum mit Lorentzmetrik (Signatur $(+,-,\cdots,-)$) auf dem zugehörigem Vektorraum. Seine Automorphismengruppe heiße Poincaré Gruppe. Nach Wahl eines Ursprungs kann diese mit $\mathrm{Poin} = V \rtimes \mathrm{Lor}$ identifiziert werden. Wie in Aufgabe 1 identifizieren wir $\mathsf{Lie}(\mathrm{Lor})$ mit $V \wedge V$ und entsprechend $\mathsf{Lie}(\mathrm{Poin})$ mit $V \oplus V \wedge V$. Das Lie-Produkt ist dann gegeben durch

$$\big[(m, M), (n, N)\big] = \big(Mn - Nm\,,\; MN - NM\big)\,. \tag{14}$$

Die Anwendungen Mn und Nm von Elementen von $V \wedge V$ auf V ist wie in (3) erklärt.

Zeigen Sie, dass die adjungierte Darstellung $\mathsf{Ad} : \mathrm{Poin} \to \mathsf{End}\big(\mathsf{Lie}(\mathrm{Poin})\big)$ gegeben ist durch

$$\mathsf{Ad}_{(a,A)}(m, M) = \Big(Am - \big((A \otimes A)\,M\big)a\,,\; (A \otimes A)\,M\Big)\,. \tag{15}$$

Somit gilt auch

$$\mathsf{Ad}_{(a,A)^{-1}}(m, M) = \Big(A^{-1}\big(m + Ma\big)\,,\; (A^{-1} \otimes A^{-1})\,M\Big)\,. \tag{16}$$

Wir identifizieren den zu $\mathsf{Lie}(\mathrm{Poin})$ dualen Vektorraum $\mathsf{Lie}^*(\mathrm{Poin})$ ebenfalls mit $V \oplus V \wedge V$, wobei die natürliche Paarung $\mathsf{Lie}^*(\mathrm{Poin}) \times \mathsf{Lie}(\mathrm{Poin}) \to \mathbb{R}$ durch das Skalarprodukt η erklärt ist, das man in natürlicher Weise auf Tensorprodukte fortgesetzt hat. In Komponenten bezüglich einer Basis von V ist diese Paarung dann gegeben durch

$$\big((\lambda,\Lambda),(m,M)\big) := \eta_{ab}\lambda^a m^b + \tfrac{1}{2}\eta_{ac}\eta_{bd}\Lambda^{ab}M^{cd} \tag{17}$$

Die koadjungierte Darstellung Ad^* : Poin $\to$ $End\big(Lie^*(\text{Poin})\big)$ ist definiert durch

$$Ad^*_{(a,A)}(\lambda,\Lambda) := (\lambda,\Lambda)\circ Ad_{(a,A)^{-1}}\,. \tag{18}$$

Zeigen Sie, dass die koadjungierte Darstellung gegeben ist durch

$$Ad^*_{(a,A)}(\lambda,\Lambda) := \Big(A\lambda\,,\;\big(A\otimes A\big)\,\Lambda - a\wedge A\lambda\Big)\,. \tag{19}$$

Tipp: Wenden Sie mit Hilfe von (16) die Definitionsgleichung (18) auf ein Element $(m,M)\in Lie(\text{Poin})$ an und lesen Sie die Koeffizienten von m und M ab.

Vergleichen Sie (15) mit (19). Welche Gemeinsamkeiten und welche Unterschiede sehen Sie?

Aufgabe 4

Ein materielles System in der Minkowski Raum-Zeit M werde durch einen symmetrischen und divergenzfreien Energie-Impuls-Tensor T beschrieben. Die Wirkung der Poincaré Gruppe definiert einen Homomorphismus V : $Lie(\text{Poin})\to Vek(M)$ in die Lie-Algebra der Vektorfelder auf M. Wählt man wieder einen Ursprung z in M, dass kann man $Lie(\text{Poin})$ mit $V\oplus V\wedge V$ identifizieren. Bezüglich affiner Koordinaten $\{x^a\}$ auf M ist V dann gegeben durch (wobei $\partial_a := \partial/\partial x^a$ und $x_a := \eta_{ab}x^b$ etc.)

$$V_{(m,M)} = m^a\partial_a + \tfrac{1}{2}M^{ab}\big[(x_b - z_b)\partial_a - (x_a - z_a)\partial_b\big]\,. \tag{20}$$

Rechnen Sie nach, dass

$$\big[V_{(m,M)}, V_{(n,N)}\big] = V_{[(m,M),(n,N)]}\,. \tag{21}$$

Zeigen Sie, dass die Vektorfelder (20) Killingfelder der Metrik $\eta = \eta_{ab}\,dx^a\otimes dx^b$ sind und dass die Vektorfelder

$$J_{(m,M)} := T^{ab}V^c_{(m,M)}\eta_{bc}\partial_a \tag{22}$$

divergenzfrei sind. Integriert man diese über eine raumartige Hyperfläche $\Sigma\subset M$ so erhält man eine dem Element $(m,M)\in Lie(\text{Poin})$ zugeordnete „Ladung“ Q (n bezeichnet hier das Normalenvektorfeld zu Σ in M)

$$Q[\Sigma;m,M] = \int_\Sigma \eta\big(J_{(m,M)},n\big)\,d\mu_\Sigma\,. \tag{23}$$

Zeigen Sie, dass die Abbildung $(m, M) \mapsto Q[\Sigma; m, M]$ linear ist, und dass es unter geeigneten Abfallbedingungen von T im räumlich Unendlichen von der Wahl der raumartigen Hyperfläche Σ überhaupt nicht abhängt. Somit definiert Q ein Element in $\mathrm{Lie}^*(\text{Poin})$. Zeigen Sie allgemein, dass sich dieses unter Poincaré Transformationen mit der koadjungierten Darstellung transformiert, vorausgesetzt, T transformiert sich wie ein Tensor. Setzen Sie dies in Beziehung zu den üblichen Komponenten-Ausdrücken (gilt nur bezüglich affiner Koordinaten!) von „Vierer-Impuls“ und „Sechser-Drehimpuls“:

$$P^a := \int_\Sigma T^{ab} n^c \eta_{bc} \, d\mu_\Sigma \,, \tag{24}$$

$$J^{ab}(z) := \int_\Sigma \big((x-z)^a T^{bc} - (x-z)^b T^{ac}\big) n^d \eta_{cd} \, d\mu_\Sigma \tag{25}$$

in dem Sie zeigen, dass sich letzterer unter Translation des Bezugspunktes $z \mapsto z + a$ gemäß $J \mapsto J - a \wedge P$ transformiert. Was hat das mit (19) zu tun?