Übungen zur Vorlesung

Weiterführende Themen zur Speziellen Relativitätstheorie und relativistischen Feldtheorie

von DOMENICO GIULINI

Blatt 5

Im Folgenden sei (V, η) 4-dimensionaler, reeller Vektorraum mit Metrik der Signatur $(+,-,-,-)$, und $\star : \bigwedge^p V \to \bigwedge^{4-p} V$ die Hodge-Abbildung (je eine Abbildung für $p = 0,1,2,3,4$). Wir interessieren uns für die Menge der bezüglich η antisymmetrischen Endomorphismen

$$\widehat{\mathrm{End}}(V) = \big\{ F \in V \otimes V^* : \eta(Fv, w) = -\eta(v, Fw)\,; \forall v, w \in V \big\}\,. \tag{1}$$

Wie üblich können wir diese mit Hilfe von η mit $V \wedge V$ identifizieren. Somit können wir $\star$ auf Elemente in $\widehat{\mathrm{End}}(V)$ anwenden.

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom von $F \in \widehat{\mathrm{End}}(V)$ gegeben ist durch

$$\det\big(F - \lambda\, \mathrm{id}_V\big) = \lambda^4 - \tfrac{1}{2}\lambda^2\, \mathrm{Spur}(F \circ F) + \det(F)\,. \tag{2}$$

Tipp: Die Determinante von $X \in V \otimes V^*$ kann wie folgt geschrieben werden:

$$\det(X) = -\tfrac{1}{4!}\,\varepsilon_{abcd}\,\varepsilon^{klmn} X^a_k X^b_l X^c_m X^d_n\,. \tag{3}$$

Wenden Sie das auf $X = F - \lambda \mathrm{id}_V$ an und werten Sie das Produkt der ε-Tensoren für den Term $\propto \lambda^2$ aus. Die Koeffizienten der anderen Potenzen von λ sind sowieso klar (ok?).

Aufgabe 2

Sei $n \in V$ mit $\eta(n, n) = 1$. Zeigen Sie, dass für alle $F \in \widehat{\mathrm{End}}(V)$ gilt:

$$F = n \wedge i_n F - \star(n \wedge i_n \star F)\,. \tag{4}$$

Tipp: Schreiben Sie $\star(n \wedge i_n \star F)$ in Komponenten. Das Produkt zweier ε-Tensoren werten Sie wieder direkt aus.

Aufgabe 3

Beweisen Sie, dass für je zwei Elemente $F, G \in \widehat{\mathrm{End}}(V)$ folgende Identität gilt:

$$F \circ G - (\star G) \circ (\star F) = \tfrac{1}{2}\mathrm{Spur}(F \circ G)\, \mathrm{id}_V\,. \tag{5}$$

Tipp: Schreiben Sie $(\star G) \circ (\star F)$ in Komponenten und werten sie erneut das Produkt der ε-Tensoren wie üblich aus.

Leiten Sie durch Spezialisierung von (5) die weiteren Identitäten für $F \in \widehat{\mathrm{End}}(V)$ ab (wir lassen nun das Kompositionssymbol $\circ$ weg und schreiben $F^2 := F \circ F$ etc):

$$F^2 - (\star F)^2 = 2 I_1 \, \mathrm{id}_V \,, \tag{6a}$$

$$F\,(\star F) = I_2 \, \mathrm{id}_V \,, \tag{6b}$$

$$F^4 - 2 I_1 \, F^2 - I_2^2 \, \mathrm{id}_V = 0 \,. \tag{6c}$$

Dabei haben wir folgende Abkürzungen benutzt:

$$I_1 := \tfrac{1}{4}\,\mathrm{Spur}\big(F^2\big)\,, \qquad I_2 := \tfrac{1}{4}\,\mathrm{Spur}\big(F\,(\star F)\big)\,. \tag{7}$$

Beweisen Sie damit, dass jedes Spurpolynom in den F und $(\star F)$ durch die beiden Invarianten I_1 und I_2 ausgedrückt werden kann.

Der spurfreie Anteil von F^2 ist

$$T := F^2 - \tfrac{1}{4}\mathrm{Spur}(F^2)\mathrm{id}_V = F^2 - I_1 \, \mathrm{id}_V \tag{8}$$

Zeigen Sie mit Hilfe von (6c), dass

$$T^2 = (I_1^2 + I_2^2)\, \mathrm{id}_V \tag{9}$$

und mit Hilfe von (5), dass

$$T = \tfrac{1}{2}\big(F^2 + (\star F)^2\big)\,. \tag{10}$$

Folgern Sie aus letzterer, dass T invariant unter sogenannten Dualitätstransformationen ist:

$$\begin{pmatrix} F \\ \star F \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} F_\theta \\ \star F_\theta \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ \star F \end{pmatrix}\,. \tag{11}$$

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass

$$\det(F) = \det(\star F) = -I_2^2\,. \tag{12}$$

Tipp: Vergleichen Sie (2) mit (6c) und erinnern Sie sich an den Satz von Caley-Hamilton aus der Linearen Algebra. Folgern Sie daraus den Wert von $\det(F)$. Den Wert für $\det(\star F)$ bekommen Sie dann mit Hilfe von (6b).

Zeigen Sie, dass die Quadrate der Eigenwerte von $F \in \widehat{\mathrm{End}}(V)$ gegeben sind durch

$$\lambda^2 = I_1 \pm \sqrt{I_1^2 + I_2^2}\,. \tag{13}$$

Benutzen Sie die Zerlegung (4) und zeigen Sie damit, dass die Invarianten $I_{1,2}$ durch die Vektoren $E := i_n F$ und $B := i_n \star F$ wie folgt ausgedrückt werden können

$$I_1 = \tfrac{1}{2}\big(\|E\|^2 - \|B\|^2\big)\,, \tag{14a}$$

$$I_2 = E \cdot B\,, \tag{14b}$$

wobei hier $\|X\|^2 := -\eta(X, X)$ und $E \cdot B = -\eta(E, B)$. (Das Minuszeichen wählt man, weil E und B raumartig sind und η auf raumartigen Vektoren gemäß unserer Vorzeichenkonvention *negativ* definit ist.)

Bemerkung

Alles in den Aufgaben 2-4 Gesagte findet Anwendung in der Elektrodynamik. Dazu identifiziert man F mit dem elektromagnetischen Feldstärketensor und T mit dessen Energie-Impuls-Tensor. Dort nennt man (9) die *Rainich-Identität*.

Aufgabe 5

Benutzen Sie die Ergebnisse von Aufgabe 4 um Lorentztransformationen der Form $\exp(F) \in \mathrm{Lor}_+^\uparrow$ zu klassifizieren, wobei $F \in \mathrm{Lie}(\mathrm{Lor}) \cong \widehat{\mathrm{End}}(V)$. Diese Klassifikation soll anhand der Eigenwerte von F geschehen. Betrachten Sie dazu den komplezifizierten Vektorraum $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes V$, den Sie als Vektorraum über $\mathbb{C}$ auffassen.

Führen Sie nun folgende Fallunterscheidung durch:

1. Allgemeiner Fall: $I_2 \neq 0$, d.h. F hat Höchstrang.
   Dann existieren vier nicht-verschwindende Eigenwerte bestehend aus einem reellen Paar $\pm\lambda$ ($\lambda \in \mathbb{R}_+$) mit reellen lichtartigen Eigenvektoren, die eine reelle zeitartige Ebene aufspannen, und einem imaginären Paar $\pm i\sigma$ ($\sigma \in \mathbb{R}_+$) mit imaginär komplex-konjugierten Eigenvektoren, die eine reelle raumartige Ebene aufspannen. Die entsprechende Lorentztransformation auf V besteht dann aus einem Boost in der zeitartigen Ebene und einer gleichzeitigen räumlichen Drehung in der raumartigen Ebene.

2a. Halb-Entarteter Fall a (auch hyperbolischer Fall): $I_2 = 0$ und $I_1 > 0$ (F hat Rang 2).
   Dann existieren drei reelle Eigenwerte, $\pm\lambda$ mit $\lambda \in \mathbb{R}_+$ und $\lambda = 0$. Zu den ersten beiden gehören reelle lichtartigen Eigenvektoren die eine reelle zeitartige 2-dim. Ebene aufspannen. Zum Eigenwert $\lambda = 0$ gehört als Eigenraum eine reelle 2-dim. raumartige Ebene. Die entsprechende Lorentztransformation auf V besteht dann aus einem Boost in der zeitartigen Ebene, wobei die dazu orthogonale raumartige Ebene punktweise fest bleibt.

2b. Halb-Entarteter Fall b (auch elliptischer Fall): $I_2 = 0$ und $I_1 < 0$ (F hat Rang 2).
   Dann existiert ein reeller Eigenwert $\lambda = 0$ und zwei imaginäre Eigenwerte $\pm i\sigma$ mit $\sigma \in \mathbb{R}_+$. Letztere spannen in $V_{\mathbb{C}}$ eine 2-dimensionale Ebene auf, deren Durchnitt mit V eine reell 2-dimensionale raumartige Ebene ist in der die Lorentztransformation eine räumliche Drehung vollführt . Zu $\lambda = 0$ gehört die dazu orthogonale zeitartige Ebene die unter der Lorentztransformation punktweise fest bleibt.

3. Entarteter Fall (auch parabolischer Fall): $I_1 = I_2 = 0$ und F hat Rang 2 (Rang 0 ist der triviale Fall $F = 0$, den wir nicht betrachten müssen).
   Es existiert nur der Eigenwert $\lambda = 0$. Der Eigenraum (Kern von F) ist eine 2-dimensionale lichtartige Ebene E_1, d.h. enthält genau eine lichtartige Richtung L. Die Lorentztransformation fixiert die Punkte von E_1 und agiert nicht-trivial in der zu E_1 orthogonalen (bezüglich η) Ebene E_2, die mit E_1 den nicht-trivialen Schnitt L besitzt.

Tipp: Hat F nicht Höchstrang und ist nicht-trivial (Rang 0), so muss der Rang 2 betragen (warum?). Dann existieren zwei Vektoren $p, q \in V$, so dass $F = p \wedge q$ (nach Identifikation der Lie-Algebra mit $V \wedge V$.) Dann ist $I_1 = \frac{1}{2}\big[(\eta(p,q))^2 - \eta(p,p)\eta(q,q)\big]$. Zeigen Sie: In der von p und q aufgespannten Ebene liegt kein lichtartiger Vektor falls $I_1 < 0$, ein lichtartiger Vektor falls $I_1 = 0$ und zwei linear unabhängige lichtartige Vektoren falls $I_1 > 0$. Die von p und q ausgespannte Ebene ist in diesen Fällen bzw. raumartig, lichtartig und zeitartig.

Aufgabe 6

Eine Realitätsstruktur auf einem komplexen Vektorraum W ist eine lineare Bijektion $R : W \to \bar{W}$. Hier ist $\bar{W}$ der zu W komplex-konjugierte Vektorraum (:= der lineare Raum der antilinearen Funktionale auf dem Dualraum W^*). Ist $J : W \to \bar{W}$ die natürliche antilineare Bijektion, dann definiert $C := R^{-1} \circ J$ eine antilineare Bijektion von W auf sich. Gilt $C \circ C = \mathrm{id}_W$ so nennt man C eine *komplexe Konjugation*. Vektoren die invariant unter C sind nennt man reell (sie bilden einen rellen Vektorraum).

Sei nun $W = V \otimes \bar{V}$ und $k : V \to \bar{V}$ die natürliche antilineare Bijektion zwischen V und $\bar{V}$. Dann ist $J = j \otimes j^{-1}$ die natürliche antilineare Bijektion zwischen W und $\bar{W}$. Sei ferner $T : V \otimes \bar{V} \to \bar{V} \otimes V$ die lineare Bijektion die in der Transposition der Faktoren besteht. Zeigen Sie, dass $C := T^{-1} \circ J$ eine komplexe Konjugation definiert und charkterisieren Sie die rellen Vektoren. Wiederholen Sie die entsprechenden Überlegungen mit $W = V \oplus \bar{V}$.