Übungen zur Vorlesung

Weiterführende Themen zur Speziellen Relativitätstheorie und relativistischen Feldtheorie

von DOMENICO GIULINI

Blatt 6

Im Folgenden steht Ψ_π für Felder die bezüglich $SL(2,\mathbb{C})$ gemäß einer Darstellung zum Pauli-Index $\pi \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ transformieren. $\Sigma\Psi_\pi$ steht für Summen solcher Felder.

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass sich ein polynomial aus Feldern mit Pauli-Indizes $(+,+)$ und $(-,-)$ sowie den partiellen Ableitungen ∂ gebildetes Vektorfeld $j[\Psi]$ unter der Transformation

$$(\theta\Psi)_{(+,+)}(x) := +\Psi_{(+,+)}(-x)\,, \tag{1a}$$

$$(\theta\Psi)_{(-,-)}(x) := -\Psi_{(-,-)}(-x)\,. \tag{1b}$$

wir folgt verhält:

$$j[\theta\Psi](x) = -j[\Psi](-x)\,. \tag{2}$$

Gilt dies für jedes Tensorfeld j ungerader Strufe?

Ist j divergenzfrei und von räumlich kompakten Träger (d.h. der Abschluss des Durchschnitts des Trägers von j mit einer raumartigen Hyperfläche ist kompakt) dann gilt für die erhaltenen Ladungen: $Q[\theta\Psi] = -Q[\Psi]$. Gilt (2) für jedes Tensorfeld j ungerader Strufe?

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass sich ein aus Feldern mit Pauli-Indizes $(+,-)$ und $(-,+)$) höchstens quadratisch-polynomial gebildeter Ausdruck $T[\Psi]$ vom Pauli-Index $(+,+)$, in dem die Felder mit beliebig hohen Ableitungen auftreten dürfen, unter der folgenden Transformation

$$(\tilde{\theta}\psi)_{(+,-)}(x) := +i\Psi_{(+,-)}(-x)\,, \tag{3a}$$

$$(\tilde{\theta}\psi)_{(-,+)}(x) := -i\Psi_{(-,+)}(-x)\,. \tag{3b}$$

wie folgt verhält:

$$T[\theta\Psi](x) = -T[\Psi](-x)\,. \tag{4}$$

Zeigen Sie, dass sich dieses Ergebnis nicht auf höhere als quadratische Polynome in den Feldern verallgemeinern lässt.

Aufgabe 3

Die Komponenten $\sigma^{\mu AA'}$ der van-der-Waerden-Symbole sind durch die Komponenten der Matrizen $2^{-1/2}\big(E^{(2)}, \vec{\sigma}\big)$ gegeben, wobei $\vec{\sigma}$ für die drei Pauli-Matrizen steht. Wir definieren gemäß den allgemeinen Regeln für das Herunterziehen von Spinor-Indizes $\sigma^{\mu}_{BB'} := \sigma^{\mu AA'}\varepsilon_{AB}\varepsilon_{A'B'}$ und damit die vier 4×4 Matrizen

$$\gamma^{\mu} := \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}\sigma^{\mu AA'} \\ \sqrt{2}\sigma^{\mu}_{A'A} & 0 \end{pmatrix} . \tag{5}$$

[Beachten Sie, dass unten links $\sigma^{\mu}_{A'A}$ steht, also die Transponierte zu $\sigma^{\mu}_{AA'}$.] Zeigen Sie, dass diese die Antivertauschungs-Relationen der Dirac'schen γ-Matrizen erfüllen (Clifford-Algebra):

$$\big[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\big]_{+} = 2\,\eta^{\mu\nu}\,E^{(4)} . \tag{6}$$

Zeigen Sie damit, dass das Paar von Gleichungen

$$\partial_{AA'}\phi^{A} = \frac{m}{i\sqrt{2}}\bar{\chi}_{A'} , \tag{7a}$$

$$\partial^{AA'}\bar{\chi}_{A'} = \frac{m}{i\sqrt{2}}\phi^{A} . \tag{7b}$$

äquivalent ist der freien Dirac-Gleichung

$$\big(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\big)\psi = 0 \tag{8}$$

für

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi^{A} \\ \bar{\chi}_{A'} \end{pmatrix} \in V \oplus \bar{V}^{*} . \tag{9}$$

In Aufgabe 6 von Blatt 5 haben wir gesehen, dass $V \oplus \bar{V}$ eine natürliche Realitätsstruktur besitzt. Der durch ε induzierte Isomorphismus $\bar{V} \to \bar{V}^{*}$ definiert dann eine Realitätsstruktur auf $V \oplus \bar{V}^{*}$, also einen linearen Isomorphismus $R : V \oplus \bar{V}^{*} \to \bar{V} \oplus V^{*}$, gegeben durch:

$$R\begin{pmatrix} \phi^{A} \\ \bar{\chi}_{A'} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \bar{\chi}^{A'} \\ \phi_{A} \end{pmatrix} . \tag{10}$$

Zusammen mit der natürlichen anti-linearen Bijektion $J : V \oplus \bar{V}^{*} \to \bar{V} \oplus V^{*}$,

$$J\begin{pmatrix} \phi^{A} \\ \bar{\chi}_{A'} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \bar{\phi}^{A'} \\ \chi_{A} \end{pmatrix} , \tag{11}$$

erhält man die anti-lineare Selbstabbildung $C := R^{-1} \circ J : V \oplus \bar{V}^{*} \to V \oplus \bar{V}^{*}$.

Zeigen Sie, dass diese gegeben ist durch

$$C\begin{pmatrix} \phi^{A} \\ \bar{\chi}_{A'} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \chi^{A} \\ \bar{\phi}_{A'} \end{pmatrix} , \tag{12}$$

und eine *komplexe Konjugation* darstellt, also $C \circ C = \mathrm{id}_{V \oplus \bar{V}^{*}}$ genügt. Man nennt C auch die (antilineare) Abbildung der *Ladungs-Konjugation*. Zeigen Sie, dass in der Sprache der Dirac-Spinoren die Ladungs-Konjugation gegeben ist durch

$$C\psi = i\gamma^{2}\bar{\psi} . \tag{13}$$

[Achtung: In der Elementarteilchenphysik bezeichnet $\bar{\psi}$ meist nicht wie hier das Bild von Ψ unter der natürlichen antilinearen Abbildung in den komplex-konjugierten Vektorraum, sondern das sogenannte Dirac-Konjugierte, das der komplexen Konjugation der Komponenten gefolgt von Multiplikation mit γ^0 entspricht.]

Die bezüglich C reellen Elemente in $V \oplus \bar{V}^*$ (Eigenvektoren von C zum Eigenwert 1) heißen *Majorana Spinoren*. Sie bilden einen reellen Untervektorraum von $(V \oplus \bar{V}^*)_{\text{Majorana}} \subset V \oplus \bar{V}^*$, der allerdings die folgende komplexe Struktur besitzt (reell-lineare Selbstabbildung I mit $I \circ I = -\text{id}$),

$$I \begin{pmatrix} \phi^A \\ \bar{\phi}_{A'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\phi^A \\ -i\bar{\phi}_{A'} \end{pmatrix} . \tag{14}$$

Damit wird die Menge der Majorana-Spinoren wieder ein komplexer Vektorraum. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \Gamma : V &\to (V \oplus \bar{V}^*)_{\text{Majorana}} \\ \phi^A &\mapsto (\phi^A, \bar{\phi}_{A'}) \end{aligned} \tag{15}$$

dann ein Isomorphismus komplexer Vektorräume ist. Beachten Sie, dass die gleiche Vorschrift, aufgefasst als Abbildung von V nach $V \oplus \bar{V}^*$, wobei $V \oplus \bar{V}^*$ die ursprüngliche komplexe Struktur besitzt, *nicht* komplex-linear ist.

Aufgabe 4

Wir betrachten die beiden masselosen Gleichungen

$$\partial_{AA'}\phi^A = 0\,, \tag{16a}$$

$$\gamma^\mu \partial_\mu \psi = 0\,, \tag{16b}$$

wobei ψ ein Majorana-Spinor ist, d.h. $\psi \in (V \oplus \bar{V}^*)_{\text{Majorana}}$. Zeigen Sie, dass diese Gleichungen unter dem Isomorphismus (15) äquivalent sind.

Wir fragen uns nach der Invarianz unter räumlichen Spiegelungstransformationen. Dazu betrachten wir die folgende Transformation: Sei n ein zeitartiger normierter Vierervektor. Dann ist die Spiegelung im „Raum“ senkrecht zu n gegeben durch

$$\rho_n(x) := -x + 2\,n\,\eta(n, x)\,. \tag{17}$$

Zeigen Sie allgemein: Ist ψ Lösung der Dirac-Gleichung (8), dann löst

$$P_n(\psi) := \kappa n_\mu \gamma^\mu \psi \circ \rho_n \tag{18}$$

wieder die Dirac-Gleichung, wobei κ eine komplexe Zahl ist, die man die *intrinsiche Parität* des Feldes ψ nennt. Zeigen Sie, dass $P_n \circ P_n = \kappa^2\,\text{id}$, so dass $\kappa \in \{1, -1, i, -i\}$ falls man $P_n \circ P_n = \pm\text{id}$ fordert (warum?). Unter welcher Einschränkung an κ vetrauscht P_n mit der Ladungskonjugation?

Vertauscht P_n mit C, dann operiert die Paritätstransformation auch auf den Majorana-Spinoren und (18) ist eine Symmetrie von (16b). Damit ist sie aber auch eine Symmetrie von (16a), wenn man die Paritätstransformation durch $\hat{P}_n := \Gamma^{-1} \circ P_n \circ \Gamma$ implementiert. Zeigen Sie, dass diese dann gegeben ist durch

$$\hat{P}_n(\phi^A) = \kappa\sqrt{2} n^{AA'}\,\bar{\phi}_{A'} \circ \rho_n\,. \tag{19}$$

Was fällt Ihnen auf? warum ist diese antilinear, während doch P_n linear schien? Ist nun (16a) paritätsinvariant oder nicht?