

ENERGIE UND IMPULS VON FELDERN

Elektromagnetische Felder haben Energie und Impuls. Wir sehen uns das in einem wichtigen Fall genauer an.

[H12] Ebene Wellen II **[1 + 1 + 2 + 2 = 6 Punkte]**

Wir betrachten die Ebene Welle aus [H10], deren elektrische Komponente die Form $\vec{E}(t, \vec{x}) = \vec{E}(u)$ mit $u = \vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t$ hat.

- Berechnen Sie den Poynting-Vektor $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B}$ und die Energiedichte $w = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2)$ einer solchen ebenen Welle.
- Überprüfen Sie die Kontinuitätsgleichung für den Energiefluss, $\partial_t w + \text{div} \vec{S} = -\vec{E} \cdot \vec{j}$.
- Berechnen Sie den Maxwell'schen Spannungstensor $T^{ik} = -(E^i E^k + B^i B^k - \frac{1}{2} \delta_{ik} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2))$. Nutzen Sie Maxwell-Gleichungen $\partial_k E^k = \rho$ und $\partial_k B^k = 0$, um die Kontinuitätsgleichung $\partial_t S^i + \partial_k T^{ik} = -(\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B})^i$ für die ebenen Wellen zu überprüfen.
- Wie groß ist der durch diese ebene Welle erzeugte Strahlungsdruck auf eine Fläche mit Normalenvektor \vec{n} , $T^{ik} n^k$?

[H13] Energie und Kraft geladener Kugeln **[2 + 4 = 6 Punkte]**

Wir betrachten leitende Kugeln mit Radius R , die auf ihrer Oberfläche die Ladung Q tragen.

- Berechnen Sie die Energie des elektrischen Feldes einer einzelnen solchen Kugel. Die Ladung ist hier homogen verteilt.
- Betrachten Sie nun zwei identische Kugeln, deren Mittelpunkte sich in einem Abstand ℓ voneinander befinden. Berechnen Sie die Energie dieses Systems. Variieren Sie dann den Abstand ℓ und berechnen Sie so die Kraft zwischen den beiden Kugeln.

Hinweise:

1.) Da die Kugeln Leiter sind, ist das Potential auf ihren Oberflächen konstant. Aus Symmetriegründen ist diese Konstante auf beiden Oberflächen die gleiche und hat den Wert

$$\Phi \equiv \phi(\vec{r})|_{\vec{r} \in \partial K_i} = \frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\ell - R} \right),$$

wobei ∂K_i die Oberfläche der Kugel K_i bezeichnet, $i = 1, 2$.

2.) In Anwesenheit einer zweiten Kugel ist die Ladung nicht mehr homogen verteilt. Beachten Sie aber, dass das Integral der Flächenladungsdichte σ über die gesamte Kugeloberfläche nach wie vor den Wert Q annimmt,

$$\int_{\partial K_i} d^2 f \sigma(\theta, \varphi) = Q,$$

wobei ∂K_i die Oberfläche der Kugel K_i bezeichnet, $i = 1, 2$.

3.) Um nun die Energie zu berechnen, ersetze man in der Integration über die Energiedichte den Ausdruck \vec{E}^2 durch $-\vec{E} \cdot \text{grad} \phi$, nutze partielle Integration und die Maxwellgleichung $\text{div} \vec{E} = \rho$.

HINWEIS

Bitte geben Sie auf Ihren abgegebenen Lösungen immer Name, Vorname, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an!