

POTENTIALTHEORIE

Kann man aus Ladungs- und Stromverteilungen die Potentiale ermitteln, so lassen sich auch die Feldkonfigurationen leicht bestimmen. Daher ist die Potentialtheorie wichtig.

[H16] Zum Vektorpotential **[1 + 2 + 1 + 2 + 2 = 8 Punkte]**

In der Vorlesung wurden mit Hilfe der Poisson-Gleichung hilfreiche Darstellungen für das Potential und das elektrische Feld von Ladungsverteilungen gefunden. Hier versuchen wir dies analog für das Vektorpotential und die magnetische Flussdichte.

- (a) Warum ist das Vektorpotential \vec{A} in Lorenzgleichung bei zeitunabhängigen Strömen und Feldern gegeben als

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3y \frac{\vec{j}(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} ?$$

- (b) Zeigen Sie, dass $\text{div} \vec{A} = 0$ erfüllt ist: Begründen Sie dazu, dass $\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} = -\frac{\partial}{\partial y^i} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|}$ ist, und wälzen Sie durch partielle Integration die Ableitung von $\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|}$ auf $\vec{j}(\vec{y})$ ab. Welche Eigenschaft muss $\vec{j}(\vec{y})$ haben, damit hier keine Randterme auftreten?

- (c) Zeigen Sie in Indexnotation $\text{rot}(f\vec{C}) = (\text{grad} f) \times \vec{C} + f(\text{rot} \vec{C})$.

- (d) Zeigen Sie unter Verwendung von (c), dass

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3y \vec{j}(\vec{y}) \times \frac{\vec{x} - \vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|^3}.$$

- (e) Werten Sie diesen Ausdruck für eine fadenförmige Stromdichte $\vec{j}(\vec{x}) = J\delta(x)\delta(y)\vec{e}_z$ aus. Mit $\int du(1 + u^2)^{-3/2} = 2$ sollte sich $\vec{B}(\vec{x}) = \frac{1}{2\pi R} J\vec{e}_\varphi$, $R^2 = x^2 + y^2$, ergeben.

[H17] Greensfunktion **[4 Punkte]**

Zeigen Sie, dass die Greensfunktion

$$G(t, t') = \frac{1}{\omega} \theta(t - t') \sin(\omega(t - t'))$$

die Differentialgleichung

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right)G(t, t') = \delta(t - t')$$

erfüllt und dass demnach

$$x_{\text{ret}}(t) = \int dt' G(t, t') f(t')$$

die inhomogene Schwingungsgleichung

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right)x(t) = f(t)$$

löst. Vereinfachen Sie das Integral $x_{\text{ret}}(t)$ mit Hilfe der Definition der Stufenfunktion $\theta(t)$ und überprüfen Sie die inhomogene Schwingungsgleichung.

HINWEIS

Bitte geben Sie auf Ihren abgegebenen Lösungen immer Name, Vorname, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an!