FOURIERTRANSFORMATION

Die Fouriertransformation ist eine von vielen Arten, Funktionen als Linearkombinationen in Basisfunktionen mit schönen Eigenschaften auszudrücken.

[H20] *Beugung am Spalt* **[$2+2+2=6$ Punkte]**
Ein Spalt habe die Breite L. Um die Beugung am Spalt studieren zu können, benötigen wir die Fouriertransformation des Spaltes.

(a) Berechnen Sie die Fouriertransformierte

$$\tilde{g}_L(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} g_L(x)\,,$$

wobei der Spalt beschrieben wird durch

$$g_L(x) = \begin{cases} \frac{1}{L} & -\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Bestätigen Sie

$$\tilde{g}_L(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{kL} \sin\frac{kL}{2}\,.$$

(b) Was ist das Fourierspektrum $\tilde{g}_L$ im Grenzfall $L \to 0$?
(c) Zeigen Sie durch Anwenden auf Testfunktionen, dass g_L mit $L \to 0$ gegen die δ-Distribution strebt. Was ist demnach das Fourierspektrum der δ-Distribution?

[H21] *Greensfunktion via Fouriertransformation* **[$2+2+2=6$ Punkte]**
Betrachten Sie eine Funktion $x(t)$ und die δ-Distribution dargestellt durch ihre jeweiligen Fouriertransformationen:

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathrm{d}\omega\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\, \tilde{x}(\omega)\,, \quad \delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int \mathrm{d}\omega\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass $x(t)$ die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + \frac{2}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = \delta(t)\,, \quad \omega_0 > \frac{1}{\tau} > 0\,,$$

eines gedämpften harmonischen Oszillators erfüllt, der zur Zeit $t = 0$ angestoßen wird, wenn

$$\tilde{x}(\omega) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\omega^2 - 2\mathrm{i}\omega/\tau - \omega_0^2} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(\omega - \omega_+)(\omega - \omega_-)}$$

mit $\omega_\pm = \mathrm{i}/\tau \pm \Omega$ und $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - 1/\tau^2}$ gilt.
(b) Was ist die Summe der Residuen der Funktion $\tilde{x}(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ bei ω_+ und ω_-?
(c) Verwenden Sie die Resultate aus der Vorlesung zur Berechnung von Integralen rationaler Funktionen, um zu zeigen, dass gilt:

$$x(t) = \theta(t)\, \mathrm{e}^{-t/\tau}\, \frac{\sin \Omega t}{\Omega}\,.$$

[H22*] *Freiwillige Zusatzaufgabe: Hauptwert* **[$2^* + 1^* + 1^* = 4^*$ Extrapunkte]**
Wir betrachten den Hauptwert des Integrals über die reelle Achse

$$I = P \int \mathrm{d}x\, \frac{Q(x)}{x}\,,$$

dessen Integrand einen einfachen Pol bei $x = 0$ auf der reellen Achse habe. Weiter sei $Q(z)$ meromorph in der oberen Halbebene, und es gelte $|Q(re^{\mathrm{i}\lambda})| < \varepsilon$ für alle $r > R(\varepsilon)$ und für alle $0 \leq \lambda \leq \pi$. Der Hauptwert wurde in der Vorlesung eingeführt, er ist definiert als

$$P \int \mathrm{d}x \, \frac{Q(x)}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \mathrm{d}x \, \frac{Q(x)}{x} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \mathrm{d}x \, \frac{Q(x)}{x} \right) .$$

(a) Um den Pol bei $x = 0$ zu vermeiden, betrachten Sie einen Integrationsweg, bei dem $x = 0$ durch einen winzigen Halbkreis in der oberen Halbebene umschifft wird. Skizzieren Sie den Integrationsweg. Parametrisieren Sie den kleinen Halbkreis durch $z = \varepsilon e^{\mathrm{i}\lambda}$, $0 \leq \lambda \leq \pi$, und berechnen Sie das Integral I_ε über den kleinen Halbkreis im Limes $\varepsilon \to 0$. Wieso ist das Resultat das *halbe* Residuum von $\frac{Q(z)}{z}$ an der Stelle $z = 0$?

(b) Zeigen Sie weiter dass das Integral $I - I_\varepsilon$ durch die Residuen von $\frac{Q(z)}{z}$ in der oberen Halbebene ausgedrückt werden kann.

(c) Geben Sie damit schließlich eine formale Lösung für den Hauptwert I an.

HINWEIS

Bitte geben Sie auf Ihren abgegebenen Lösungen immer Name, Vorname, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an!