ELEKTROSTATIK

An einfachen Beispielen zeitlich unveränderlicher Konfigurationen üben wir den Umgang mit den zentralen Größen Feld, Potential und Ladungsdichte, und wie diese miteinander zusammenhängen.

[H10] *Geladener Draht* **[$3 + 4 + 3 = 10$ Punkte]**

Ein unendlich langer Draht mit verschwindend kleinem Durchmesser sei homogen geladen, die Ladungsdichte pro Längeneinheit sei λ.

(a) Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ mit Hilfe des Gaußschen Satzes.

(b) Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ nun direkt mit der Definition aus der Vorlesung,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \mathrm{d}^3 r' \frac{\varrho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} (\vec{r} - \vec{r}\,')\,,$$

und zeigen Sie, dass beide Resultate übereinstimmen

(c) Berechnen Sie die Potentialdifferenz $\Phi(\vec{r}) - \Phi(\vec{r}_0)$ mit der folgenden Formel aus der Vorlesung:

$$\Phi(\vec{r}) - \Phi(\vec{r}_0) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \mathrm{d}\vec{r}\,' \cdot \vec{E}(\vec{r}\,')\,.$$

[H11] *Yukawa-Potential* **[$3 + 4 + 3 = 10$ Punkte]**

Betrachten Sie das folgende elektrostatische Potential, das so genannte Yukawa-Potential, das in der Kern- und Elementarteilchenphysik eine große Rolle spielt:

$$\Phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathrm{e}^{-\mu r}}{r}\,,$$

wobei $r = |\vec{r}|$ und $\mu > 0$ ist. Für kleine r gleicht es annähernd dem Coulomb-Potential einer Punktladung Q. (Worin unterscheidet es sich vom Coulomb-Potential, besonders wenn r groß wird? Was passiert im Limes $\mu \to 0$?)

(a) Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$.

(b) Berechnen Sie die Ladungsdichte $\varrho(\vec{r})$. Verwenden Sie dazu z.B. für $r \neq 0$ den Radialteil des Laplace-Operators in Kugelkoordinaten: $\Delta\Phi(r) = (\partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r)\Phi(r)$. Denken Sie an die fundamentale Identität $\Delta\frac{1}{r} = -4\pi\delta(\vec{r})$ ist. Es genügt hierbei, das Verhalten von $\varrho(\vec{r})$ bei $r = 0$ zu erraten.

(c) Zeigen Sie, dass die Gesamtladung Null ist. Verwenden Sie dazu entweder Ihre Ergebnisse aus (a) oder aus (b). Sie können damit auch überprüfen, ob Sie in (b) das richtige Verhalten von $\varrho(\vec{r})$ bei $r = 0$ erraten haben.

[H12] *Spiegelladung* **[$2 + 4 + 4 = 10$ Punkte]**

Betrachten Sie eine Ladung in der Nähe einer leitenden, geerdeten Kugelschale mit Radius a und Mittelpunkt im Ursprung. Die Punktladung Q befinde sich an der Stelle $\vec{y}$, $|\vec{y}| > a$. Das Potential $\Phi(\vec{r})$ im Gebiet außerhalb der Kugel muss die Randbedingung $\Phi(|\vec{r}| = a) = 0$ erfüllen. Anstatt uns mit der Kugelschale direkt zu befassen, führen wir eine virtuelle, zweite, Ladung Q' an einer Stelle $\vec{y}\,'$ mit $|\vec{y}\,'| < a$, also im Innern der Kugel, ein. Unser Ansatz für das Potential lautet damit

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{y}|} + \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{y}\,'|}$$

(a) Folgern Sie aus der Symmetrie des Problems, dass $\vec{y}$ und $\vec{y}\,'$ parallel zueinander sein müssen.

(b) Zur Vereinfachung setzen Sie $\vec{r} = r\vec{e}_r$ und $\vec{y} = y\vec{e}_y$, $\vec{y}\,' = y'\vec{e}_y$ mit $|\vec{e}_r| = |\vec{e}_y| = 1$. Bringen Sie damit die Randbedingung für $\Phi(r = a)$ in die Form $\frac{Q}{a} = -\frac{Q'}{y'}\frac{...}{...}$. *Hinweis*: Es ist nützlich, $|\vec{x}| = (\vec{x}^2)^{1/2}$ zu schreiben und auszunutzen, dass $\vec{e}_r$, $\vec{e}_y$ Einheitsvektoren sind.

(c) Berechnen Sie aus der Tatsache, dass die Randbedingung (b) für alle Winkel zwischen $\vec{e}_r$ und $\vec{e}_y$ gelten muss, den Ort y' und die Ladung Q' der Spiegelladung. (Wer will, kann sich für den Spezialfall $a = 1$ überlegen, wieso dies auch „Methode der reziproken Radien“ genannt wird.)

HINWEIS: Bitte geben Sie immer Name, Vorname, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an!
Bitte Lösungen unbedingt zusammenheften!