

INTEGRIEREN

Die Klausuren zu den *Mathematischen Methoden der Physik* haben gezeigt, dass Integrieren noch sehr viel geübt werden muss. Diese Aufgaben beschäftigen sich mit typischen Integralen der Physik, insbesondere dem Wegintegral.

[H1] Arbeit**[5 + 5 + 5 = 15 Punkte]**

Ermitteln Sie die Arbeit

$$W[\Gamma] = \int_{\lambda}^{\bar{\lambda}} d\lambda \frac{d\vec{r}(\lambda)}{d\lambda} \cdot \vec{F}(\vec{r}(\lambda)),$$

die bei Verschieben eines Teilchens im Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ längs des Weges $\Gamma : \lambda \mapsto \vec{r}(\lambda)$ von $\vec{r}(\underline{\lambda})$ zu $\vec{r}(\bar{\lambda})$ geleistet wird.

- Es sei $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{A} \times \vec{r}$, $\vec{A} = (0, 0, A)$, und Γ ein *Halbkreis* im Gegenzeigersinn um den Ursprung in einer Ebene senkrecht zu \vec{A} .
- Es sei $\vec{F}(\vec{r}) = -\kappa \cdot (x^3 + 2xy^2, y^3 + 2yx^2, 0)$ und Γ der stückweise gerade Weg, der von $(-a, -b, 0)$ über $(+a, -b, 0)$ zu $(a, b, 0)$ führt.
- Warum ist es sinnvoll, zunächst zu prüfen, ob zur Kraft ein Potential gehört?

[H2] Mehr Arbeit**[7 Punkte]**

Welche Arbeit leisten die gravitativen Kräfte am Fadenpendel auf dem Bahnabschnitt zwischen minimalem und maximalem Winkel zur Vertikalen?

[H3] Weglänge**[8 Punkte]**

Wie lang ist die Parabel $\Gamma : s \mapsto (s, as^2)$ zwischen $(0, 0)$ und $(1, a)$?

Hinweis: Sie müssen ein Integral berechnen, bei dem Sie vermutlich die Stammfunktion nicht selbst bestimmen können. Schlagen Sie die Stammfunktion dann nach, oder probieren Sie es mit MATHEMATICA, und überprüfen Sie explizit durch Ableiten, dass dies die korrekte Stammfunktion ist.

[H4*] Volumenintegration**[5* Extrapunkte]**

Bestimmen Sie durch Integration über x und y das Volumen zwischen den Flächen

$$z(x, y) = h - ax^2 - by^2 \quad \text{und} \quad z(x, y) = 0.$$

Hinweis: Versuchen Sie, alle Integrationen ohne Formelsammlungen und ohne MATHEMATICA zu berechnen. Die Substitution $x = \sin \varphi$ kann sich im Verlauf der Rechnung als sehr nützlich erweisen, da dann z.B. $1 - x^2 = \cos^2 \varphi$ ist.

HINWEIS

Bitte geben Sie auf Ihren abgegebenen Lösungen immer Name, Vorname, Matrikelnummer und die Übungsgruppe (Nummer und Name des Tutors) an! Lösungen unbedingt zusammenheften!