

WELLENGLEICHUNG & DIPOLOSTRAHLUNG

Die inhomogene Wellengleichung mit zeitabhängiger Inhomogenität führt zum retardierten Potential.

[P24] *Inhomogene Wellengleichung*

Es bezeichne $K_{r,\vec{x}} = \{\vec{y} : |\vec{x} - \vec{y}| \leq r\}$ die Kugel um \vec{x} mit Radius r . Wie in der Vorlesung behandelt, lässt sich die Lösung der inhomogenen Wellengleichung $\square u = g$ für $t \geq 0$ schreiben als

$$u(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{K_{t,\vec{x}}} d^3y \frac{g(t - |\vec{x} - \vec{y}|, \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|}.$$

Für $t \leq 0$ ergibt sich analog

$$u(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{K_{|t|,\vec{x}}} d^3y \frac{g(t + |\vec{x} - \vec{y}|, \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|}.$$

Zeigen Sie dies. Beachten Sie hierzu, dass wegen der Retardierung bzw. Avancierung der Zeit das erste Argument von g sowohl von t als auch von \vec{x} abhängt (Kettenregel!).

[P25] *Dipolstrahlung*

Das von einem zeitabhängigen elektrischen Dipolmoment abgestrahlte elektromagnetische Feld hat in großer Entfernung die Form

$$\begin{aligned} \vec{B}(t, \vec{r}) &= -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} \left(\vec{e}_r \times \ddot{\vec{P}}(t - r) \right), \\ \vec{E}(t, \vec{r}) &= \vec{B}(t, \vec{r}) \times \vec{e}_r, \end{aligned}$$

wobei \vec{P} das Dipolmoment der Ladungsverteilung ist.

- Finden Sie die Energiestromdichte \vec{S} eines derartigen elektromagnetischen Feldes. *Hinweis:* Verwenden Sie Kugelkoordinaten und arbeiten Sie mit einem Dipolmoment $\vec{P} = P\vec{e}_z$. Sie sollten etwas von der Form $\vec{S} = |\vec{S}|\vec{e}_r \propto \frac{1}{r^2} \dot{P}^2 \sin^2 \theta$ erhalten.
- Integrieren Sie \vec{S} über eine Kugeloberfläche vom Radius R , um den gesamten Energiefluss I der Dipolstrahlung zu bestimmen. Wie hängt I vom Radius R ab? *Hinweis:* $\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = 4/3$.
- Wählen Sie für die zeitliche Änderung des Dipolmomentes eine harmonische Schwingung $\vec{P}(t) = \vec{P}_0 \cos(\omega t)$. Wie hängt dann I von ω ab? *Hinweis:* Auch wenn dies so die Realität sträflich stark vereinfacht, gibt das Ergebnis einen Hinweis, warum der Himmel blau ist.